Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra II
Kevät 2011
Harjoitus 9

1. Algebraa kutsutaan *äärellisviritteiseksi*, jos se sisältää sellaisen äärellisen osajoukon $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, että jokainen algebran alkio voidaan kirjoittaa lineaarikombinaatioina joukon X alkioiden äärellisistä tuloista. Osoita, että jokainen äärellisviritteinen ykkösellinen, liitännäinen ja vaihdannainen R-algebra on isomorfinen jonkin R-kertoimisen polynomialgebran tekijäalgebran kanssa.

2. Olkoon A vaihdannainen rengas. Olkoot $u \in A[X]$ ja $v \in A[Y]$ polynomeja sekä $w = u(v) \in A[Y]$. Olkoon B jokin ykkösellinen, liitännäinen ja vaihdannainen A-algebra ja $y \in B$. Osoita, että $w(y) = u(v(y))$.
   Vihje: Tarkastele sijoitushomomorfismien $f : A[X] \to A[Y]$, $f(X) = v$ ja $g : A[Y] \to B$, $g(Y) = y$ yhdistelmää, joka on myös sijoitushomomorfismi.

3. Olkoon A vaihdannainen rengas. Olkoon $u \circ v = u(v)$, kun $u, v \in A[X]$. Osoita, että $(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$ kaikilla $u, v, w \in A[X]$.
   Vihje: Sovella tehtävää 2.

*4. Näytä, että kokonaisalueella A polynomialgebran $A[X]$ kaikki automorfismit (eli A-isomorfismit $f : A[X] \to A[X]$) ovat sijoitushomomorfismeja $P \mapsto P(\lambda X + \mu)$, missä $\lambda \in A^*$, $\mu \in A$.

5. Oletetaan, että R on kokonaisalue. Todista seuraavat väitteet:
   (a) Alkiot $a, b \in R$ ovat liittoalkioita, jos ja vain jos $a = bc$ jollakin yksiköllä $c \in R$.
   (b) Jos $a, b \in R \setminus \{0\}$ ovat liittoalkioita ja $a = bc$, niin c on yksikkö.
   (c) Kaikki yksiköt ovat toistensa liittoalkioita.

6. Olkoon R pääideaalirengas ja $0 \neq a \in R$. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:
   (1) a on alkualkio.
   (2) a on jaoton.
   (3) $\langle a \rangle$ on maksimaalinen ideaali.

$*$:lla merkityt tehtävät ovat palautettaviksi kelpaavia (tarkempaa tietoa palautettavista tehtävistä kurssin kotisivulla).