Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra II
Kevät 2011
Harjoitus 8

1. Kompleksilukujen kunta $\mathbb{C}$ on reaalinen vektoriavaruus. Osoita, että
   (a) on olemassa yksikäsitteinen $\mathbb{R}$-lineaarinen kuvaus
   $$\varphi : \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C},$$
   joka vie alkioiden tensoritulot $z_1 \otimes z_2 \in \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ vastaaille tuloille $z_1 \otimes z_2 \in \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}$,
   (b) kuvaus φ on surjektiivinen mutta ei injektiivinen.

2. Olkoon A ykkösellinen R-algebra. Osoita, että on olemassa R-algebrojen homomorfismi $\varphi : R \to A$, jolle pätee $1_R \mapsto 1_A$. Osoita lisäksi, että jos R on kunta, R voidaan upottaa A:n alialgebraksi.

3. Okoon A yksiulotteinen $\mathbb{Q}$-vektoriavaruus. Osoita, että mikäli määritellään tulo $ab = 0$ kaikilla $a, b \in A$, niin A on $\mathbb{Q}$-algebra ja jokainen A:n aito epätriviaali additiivinen aliryhmä on renkaan A ideaali, muttei Q-ideaali.

4. Olkoon R vaihdannainen rengas ja M jokin R-moduli. *Tensorialgebra* $T(M)$ määritellään suorana summana
   $$\bigoplus_{k=0}^{\infty} T_k(M),$$
   missä $T_0(M) = R$ ja $T_{k+1}(M) = T_k(M) \otimes M$ kaikilla $k \geq 0$. Samastetaan kukin $T_k(M)$ vastaavan alimodulin $\iota_k(T_k(M)) \subset T(M)$ kanssa, missä ι_k on kanoninen injektio. Samastetaan lisäksi modulit $R \otimes M$ ja M tunnetun isomorfismin mukaisesti. Osoita, että $(x, y) \mapsto x \otimes y$ on hyvin määritelty bilineaarinen kertolasku R-modulissa $T(M)$ ja että $T(M)$ on tämän ketolaskun suhteen liitännäinen ja ykkösellinen R-algebra.

   Vihje: modulin $T(M)$ mielivaltainen alkio on muotoa $a + \sum_{k=1}^{\infty} x_k$, missä $a \in R$, $x_k = x_k^1 \otimes \cdots \otimes x_k^k$ kaikilla $k \geq 1$ ja $x_k \neq 0$ vain äärellisen monella k.

5. Osoita, että on olemassa vain kolme keskenään epäisomorfista 2-ulotteista ykkösellistä realikertoimista algeraa.

   Vihje: Samastetaan ykkösalkion virittämä aliavaruus kerroinkunnan R kanssa (vrt. teht. 2). Valitse toiseksi kantavektoriksi 1 ja toiseksi jokin $b \notin \mathbb{R}$. Tarkastele kantavektorien kertotaulua. Jos $b^2 = x + yb$ joillain $x, y \in \mathbb{R}$, määrittele $b' = b - y/2$. Näin voit olettaa, että $b^2 \in \mathbb{R}$.

*6. Tarkastellaan symmetrisen ryhmän S_3 reaalista ryhmäalgebraa $\mathbb{R}S_3$.
   (a) Etsi algebrasta $\mathbb{R}S_3$ jokin yksiulotteinen alialgebra.
   (b) Algebra $\mathbb{R}S_3$ on myös $\mathbb{R}S_3$-moduli, kun skalaarikertolasku määritellään kaavalla $x.y = x \cdot y$. Etsi tästä modulista jokin yksiulotteinen $\mathbb{R}S_3$-alimoduli, joka on eri kuin kohdassa a) löydetty alialgebra.

   Vihje: Etsi a)-kohdassa jokin vektori $\sum_{\sigma \in S_3} x_\sigma \sigma$, jonka virittämä aliavaruus on suljettu algebrakertolaskun suhteen.

$*$:lla merkityt tehtävät ovat palautettaviksi kelpaavia (tarkempaa tietoa palautettavista tehtävistä kurssin kotisivulla).