Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra II
Kevät 2011
Harjoitus 7 (viikko 11)

1. Osoita, että jokainen Z-modulin $\mathbb{Q}$ vapaa osajoukko sisältää korkeintaan yhden alkion ja päättele tästä, että $\mathbb{Q}$ ei ole vapaa ryhmä.

2. Olkoot M ja N R-moduleja. Oletetaan, että modulilla M on kanta B ja $f : B \to N$ on jokin kuvaus. Olkoon $\varphi : M \to N$ R-lineaarinen kuvaus, jolle pätee $\varphi(b) = f(b)$ kaikilla $b \in B$. Osoita, että
   (a) Kuvaus φ on injektio, jos ja vain jos kuvajoukko fB on vapaa.
   (b) Kuvaus φ on surjektio, jos ja vain jos kuvajoukko fB virittää modulin N.

3. Olkoon R vaihdannainen rengas ja olkoot M, M', N ja P R-moduleita ja $\varphi : M \to M'$ (R-)isomorfismi. Todista seuraavat isomorfismit:
   (a) $M \otimes P \cong M' \otimes P$,
   (b) $M \otimes N \cong N \otimes M$,
   (c) $(M \otimes N) \otimes P \cong M \otimes (N \otimes P)$,
   (d) $(M \oplus N) \otimes P \cong (M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$,
   (e) $R \otimes M \cong M$, missä rengasta R ajatellaan R-modulina.

*4. Olkoot R ja S vaihdannaisia renkatia, joilla on olemassa rengashomomorfismi $R \to S$. Osoita: jos $M = R^n$, niin M_S ja S^n ovat isomorfisia S-moduleina.

5. Osoita, että jokainen vaihdannainen ryhmä on jonkin vapaan vaihdannaisen ryhmän tekijäryhmä.
   Vihje: Valitse ryhmälle G jokin virittäjäjoukko X ja tarkastele vapaata modulia $\mathbb{Z}^{(X)}$ sekä sopivaa lineaarikuvausta $\mathbb{Z}^{(X)} \to G$.

6. Tarkastellaan $\mathbb{Z}$-modulien tensorituloa $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.
   (a) Osoita, että on olemassa Z-lineaarinen kuvaus $\varphi : \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, jolle pätee $\varphi(x \otimes y) = xy$.
   (b) Osoita, että kuvaus $\psi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, missä $\psi(x) = x \otimes 1$, on surjektio ja kuvauksen φ käänteiskuvaus.

$*$:lla merkityt tehtävät ovat palautettaviksi kelpaavia (tarkempaa tietoa palautettavista tehtävistä kurssin kotisivulla).