Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra II
Kevät 2011
Harjoitus 6

1. Olkoon R vaihdannainen rengas. Osoita, että joukon X virittämä ideaali on
$$\langle X\rangle = \{\sum_{i\in I} a_i x_i : I \text{ äärellinen }, a_i \in R, x_i \in X\}.$$

2. Olkoon R vaihdannainen rengas ja A sen ideaali. Osoita:
   (a) A on alkuideaali, jos ja vain jos R/A on kokonaisalue.
   (b) A on maksimaalinen, jos ja vain jos R/A on kunta.

3. (Renkaiden homomorfialause). Olkoot A ja B renkaita ja olkoon $f : A \to B$ homomorfismi. Osoita:
   (a) f:n ydin on A:n kaksipuolinen ideaali,
   (b) f:n kuva on B:n alirengas,
   (c) f:n kanonisesta hajotelmasta
   $$f : A \xrightarrow{\pi} A/\operatorname{Ker}(f) \xrightarrow{\bar{f}} \operatorname{Im}(f) \xrightarrow{j} B,$$
   missä π on kanoninen surjektio ja j kanoninen injektio, saadaan renkaiden isomorfismi
   $$\bar{f} : A/\operatorname{Ker}(f) \xrightarrow{\cong} \operatorname{Im}(f).$$

4. Olkoon R vaihdannainen rengas ja $S^{-1}R$ sen jakorengas osajoukon S suhteen. Todista seuraavat väitteet:
   (a) $S^{-1}R$ on vaihdannainen rengas, laskutoimituksina $a/b \cdot c/d = (ac)/(bd)$ ja $a/b + c/d = (ad + bc)/(bd)$.
   (b) Kanoninen kuvaus $\eta : a \mapsto a/1$ on rengashomomorfismi.
   (c) Jos $s \in S$, kuva-alkiolla $\eta(s) \in S^{-1}R$ on käänteisalkio.
   (d) Kanoninen kuvaus η on injektio, jos ja vain jos S ei sisällä nollanjakajia.
   (e) $S^{-1}R$ on nollarengas, jos ja vain jos $0 \in S$.

5. Tarkastellaan polynomien $f = X^4 - 1$ ja $g = X^3 + X$ virittämää ideaalia polynomirenkaassa $\mathbb{Z}[X]$.
   (a) Etsi jokin $h \in \mathbb{Z}[X]$, jolle pätee $\langle h\rangle = \langle f, g\rangle$.
   (b) Osoita, että tekijärenkaassa $\mathbb{Z}[X]/\langle f, g\rangle$ on alkio a, jolle pätee $a^2 = -1$.

*6. Olkoon R rengas, jolla on ideaali A ja alirengas S. Todista seuraavat väitteet:
   (a) Jokainen R/A-moduli on myös R-moduli, mutta kaikki R-modulit eivät ole R/A-moduleja.
   (b) Jokainen R-moduli on myös S-moduli, mutta kaikki S-modulit eivät ole R-moduleja.
   Vihje: Ajattele $\mathbb{Z}_n$-moduleja.

$*$:lla merkityt tehtävät ovat palautettaviksi kelpaavia (tarkempaa tietoa palautettavista tehtävistä kurssin kotisivulla).