Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra II
Kevät 2011
Harjoitus 4

1. Olkoon G ryhmä. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:
   (i) $G \neq \{1\}$ ja G:n ainoat aliryhmät ovat G ja $\{1\}$.
   (ii) $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, missä p on alkuluku.
   (iii) $|G|$ on alkuluku.
   (iv) G on yksinkertainen ja vaihdannainen.

*2. Olkoot $H, K \leq G$ äärellisiä aliryhmiä. Osoita, että

$$|HK| = |H||K|/|H \cap K|.$$

Huomaa, että tässä ei oleteta tulon HK olevan ryhmä. (Vihje: tarkastele K:n toimintaa H:n sivuluokkien joukossa.)

3. Olkoon G äärellinen ryhmä ja $\varphi : G \to H$ surjektiivinen homomorfismi. Merkitään $\mathrm{Syl}_p(G)$:llä G:n Sylowin p-aliryhmien joukkoa ja $n_p(G) = |\mathrm{Syl}_p(G)|$. Osoita:
   (a) Jos $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$, niin $\varphi(P) \in \mathrm{Syl}_p(H)$.
   (b) Jos $Q \in \mathrm{Syl}_p(H)$, niin $Q = \varphi(P)$ jollakin $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$
   (c) $n_p(H) \leq n_p(G)$.

*4. Olkoon G äärellinen ryhmä, $H \leq G$ ja $P \in \mathrm{Syl}_p(H)$. Osoita, että jos $N_G(P) \subseteq H$, niin $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$.

5. Oloon $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Osoita, että

$$N_G(N_G(P)) = N_G(P).$$

6. Osoita, että mikään ryhmä, jonka kertaluku on 80, ei ole yksinkertainen.

$*$:lla merkityt tehtävät ovat palautettaviksi kelpaavia (tarkempaa tietoa palautettavista tehtävistä kurssin kotisivulla).