Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra II
Kevät 2011
Harjoitus 3

1. Ryhmän sisäiset automorfismit ovat muotoa $f_x(y) = xyx^{-1}$ olevat automorfismit (ks. HT2.6). Niiden joukkoa merkitän $\mathrm{Inn}(G)$. Osoita, että
$$\mathrm{Inn}(G) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(G),$$
missä $\mathrm{Aut}(G)$ on G:n automorfismien ryhmä (laskutoimituksena kuvausten yhdistäminen).

2. Oletetaan, että ryhmä G toimii joukossa X ja että $g, h \in G$ kuuluvat samaan konjugaattiluokkaan. Osoita, että $|\,\mathrm{Fix}(g)| = |\,\mathrm{Fix}(h)|$.

3. Osoita:
   (a) Jos $\sigma, \rho \in S_n$ ovat erillisiä syklejä, niin $\sigma \circ \rho = \rho \circ \sigma$.
   (b) Jokainen $\sigma \in S_n \backslash \{\mathrm{id}\}$ on pareittain erillisten syklien tulo ja esitys on tekijöiden järjestystä vaille yksikäsitteinen.
   (c) Esitä
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \in S_6$$
   erillisten syklien tulona sekä vaihtojen tulona. Laske $\mathrm{sgn}(\sigma)$.
   (d) Osoita, että $S_n = \langle (12)(12\cdots n) \rangle$.

4. Määritä ryhmien S_4 ja A_4 konjugaattiluokat ja niiden koot sekä kaikki normaalit aliryhmät.

5. Todista *Cauchyn lause*: Jos G on äärellinen ryhmä, ja p on sen kertaluvun alkutekijä, niin löytyy alkio $g \in G$, jonka kertaluku on p.

*6. Olkoon G äärellinen ryhmä ja S sen Sylowin p-aliryhmä. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:
   (i) $S \trianglelefteq G$.
   (ii) S on G:n ainoa Sylowin p-aliryhmä.
   (iii) Jokainen G:n p-aliryhmä sisältyy S:ään.
   (iv) S on *karakteristinen* G:ssä, eli kaikilla G:n automorfismeilla θ pätee $\theta(S) = S$.

$*$:lla merkityt tehtävät ovat palautettaviksi kelpaavia (tarkempaa tietoa palautettavista tehtävistä kurssin kotisivulla).