Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra II
Kevät 2011
Harjoitus 2

1. Olkoon G äärellinen ryhmä, $\varphi : G \to M$ (ryhmä)homomorfismi ja $H \leq G$.
   (a) Osoita, että $\varphi(H) \leq \varphi(G) \leq M$.
   (b) Osoita, että indeksi $[\varphi(G) : \varphi(H)]$ jakaa indeksin $[G : H]$.
   (c) Osoita, että kertaluku $|\varphi(H)|$ jakaa kertaluvun $|H|$.

*2. Olkoon $R_{m,n}$ viime viikon tehtävän 4 ekvivalenssirelaatio $\mathbb{N}$:ssä ja olkoon E kyseisen tehtävän tekijämonoidi $\mathbb{N}/R_{m,n}$. Olkoon $\varepsilon : E \to E_E$ sen kanoninen homomorfismi ($\bar{a} \mapsto [(\bar{a}, 0)]$) erotusryhmäänsä $E_E = E \times E/\sim$. Olkoot $\bar{x}, \bar{y} \in E$ lukujen $x, y \in \mathbb{N}$ luokat. Osoita, että $\varepsilon(\bar{x}) = \varepsilon(\bar{y})$, jos ja vain jos $x \equiv y \pmod{m}$.

3. Oletetaan, että ryhmä G toimii vasemmalta joukossa X. Jos $g \in G$ ja $\varphi : X \to Y$, määritellään $\varphi^g : X \to Y$ kaavalla $\varphi^g(x) = \varphi(gx)$. Osoita, että kaava $\varphi \mapsto \varphi^g$ määrittelee G:n oikeanpuoleisen toiminnan joukossa Y^X.

4. Oletetaan, että ryhmä G toimii joukossa X. Todista seuraavat väitteet:
   (a) Alkioiden radat muodostavat joukon X osituksen.
   (b) Jokainen rata on homogeeninen G-joukko.
   (c) Alkioiden kiinnittäjät ovat ryhmän G aliryhmiä, mutteivät välttämättä normaaleja. (Tarkastele esim. ryhmän S_3 luonnollista toimintaa kolmen alkion joukossa.)

5. Todista *Cayleyn lause*: Jokainen ryhmä on isomorfinen jonkin permutaatioryhmän eli symmetrisen ryhmän aliryhmän kanssa. (Tarkastele translaatiota ryhmässä.) Mikä olisi vastaava tulos monoideilla?

6. Olkoon G ryhmä ja $f_x(y) = xyx^{-1}$ kaikilla $x, y \in G$. Osoita, että f_x on G:n automofismi, ns. *sisäinen automorfismi*, kaikilla $x \in G$, ja että $x \mapsto f_x$ on G:n toiminta G:ssä, ns. *konjugointi.*

$*$:lla merkityt tehtävät ovat palautettaviksi kelpaavia (tarkempaa tietoa palautettavista tehtävistä kurssin kotisivulla).