Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra II
Kevät 2011
Harjoitus 13

1. Osoita, että jokainen algebrallisesti suljettu kunta on ääretön.

2. Etsi seuraavissa tapauksissa jokin polynomin f juurikunta kunnan K suhteen ja selvitä sen aste K:n laajennoksena:
   a) $f = X^3 - 2$, $K = \mathbb{Q}$
   b) $f = X^4 - 7$, $K = \mathbb{Q}$
   a) $f = X^4 - 7$, $K = \mathbb{F}_{11}$.

3. Osoita, että $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \ncong \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ (kuntina).

*4. a) Osoita, että algebrallisten lukujen joukko $\mathbb{A} = \{\alpha \in \mathbb{C} | \alpha \text{ on algebrallinen } \mathbb{Q}\text{:n suhteen}\}$ on kunta.
   b) Olkoon Ω alkukunnan $\mathbb{F}_p$ algebrallinen sukeuma. Osoita, että polynomin $X^{p^n} - X$ juurten joukko Ω:ssa on kunta.

*5. Olkoon Ω kunnan K algebrallinen sulkeuma. Kunnan K algebrallista laajennosta $L \subseteq \Omega$ kutsutaan *normaaliksi*, jos jokaisella K-automorfismilla $\sigma : \Omega \to \Omega$ pätee $\sigma(L) \subseteq L$. Osoita, että minkä tahansa polynomijoukon juurikunta K:n suhteen on K:n normaali laajennos.

*6. Selvitä seuraavissa tapauksissa laajennoksen L/K Galois'n ryhmä. Jos laajennos on Galois'n laajennos, etsi kaikki välilaajennokset L/M, missä $K \subseteq M \subseteq L$.
   a) $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $K = \mathbb{Q}$,
   b) $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, $K = \mathbb{Q}$,
   c) $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$, $K = \mathbb{Q}$.

$*$:lla merkityt tehtävät ovat palautettaviksi kelpaavia (tarkempaa tietoa palautettavista tehtävistä kurssin kotisivulla).