Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra II
Kevät 2011
Harjoitus 12

1. Olkoon $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ ja $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} \in E$. Osoita:
   (a) $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
   (b) $[E : Q(\sqrt{2})] = 2$ ja $[E : \mathbb{Q}] = 4$.
   (c) $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ on E:n kanta kunnan $\mathbb{Q}$ suhteen.
   (d) $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\alpha)$ ja $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\alpha)$.
   Päättele, että $E = \mathbb{Q}(\alpha)$ ja etsi α:n minimipolynomi $\mathbb{Q}$:n suhteen.

2. Osoita, että kunnan K äärellinen laajennos on äärellisviritteinen ja algebrallinen K:n suhteen.

3. Oletetaan tunnetuksi luvun π transkendenttisuus rationaalilukujen suhteen. Osoita, että ympyrän neliöinti ja kuution kahdentaminen ovat harppi-viivain-konstruktioina mahdottomia.

4. Olkoon K kunta. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:
   (i) K on algebrallisesti suljettu.
   (ii) Jokaisella polynomilla $f \in K[X]$, joka ei ole vakio, on juuri K:ssa.
   (iii) K:lla ei ole aitoja algebrallisia laajennoksia.
   (iv) K:lla ei ole aitoja äärellisiä laajennoksia.
   (v) Jos L on K:n laajennos, niin K koostuu täsmälleen niistä L:n alkioista, jotka ovat algebrallisia K:n suhteen.
   (vi) Jokaisen jaottoman polynomin $f \in K[X]$ aste on 1.

*5. Olkoon E kunnan K laajennos. Osoita:
   (a) Jos A on E:n alialgebra, $a \in A$ algebrallinen K:n suhteen ja $a \neq 0$, niin $a^{-1} \in A$.
   (b) Jos $a \in E$, $a \neq 0$ ja $a^{-1} \in K[a]$, niin a on algebrallinen K:n suhteen.
   Päättele, että E on K:n algebrallinen laajennos, jos ja vain jos jokainen En ali-K-algebra on kunta.

*6. Olkoon K kunta, E sen laajennos ja $a \in E$ transkendenttinen K:n suhteen. Osoita
   (a) Jos $p, q \in K[X]$, $q \neq 0$ ja $b \in E \setminus K$, niin $p - bq \neq 0$.
   (b) Jos $b \in K(a)$, mutta $b \notin K$, niin a on algebrallinen $K(b)$:n suhteen.
   (c) K on algebrallisesti suljettu laajennoksessa $K(a)$, eli jokainen K:n suhteen algebrallinen $K(a)$:n alkio on K:ssa ($K(a)$ on K:n *puhtaasti transkendenttinen* laajennos).

$*$:lla merkityt tehtävät ovat palautettaviksi kelpaavia (tarkempaa tietoa palautettavista tehtävistä kurssin kotisivulla).