Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra II
Kevät 2011
Harjoitus 11

1. Tutki, mitkä seuraavista polynomeista ovat jaottomia renkaassa $\mathbb{Q}[X, Y]$:

(a)	$X^2 + Y^2 - 1$	(d)	$X^3 - Y^2 - X$
(b)	$X^2 - Y^2 - X$	(e)	$X^3 - Y^3 + X^2$
(c)	$X^2 - Y^2$	(f)	$3XY^2 - XY + 2$

   Vihje: Eisensteinin kriteeri esim. renkaassa $A[Y]$, $A = \mathbb{Q}[X]$.

2. Olkoon E kunnan K laajennos ja olkoot A ja B sen osajoukkoja. Osoita, että $K(A \cup B) = K(A)(B) = K(B)(A)$.

*3. Olkoon $E = K(x)$ kunnan K äärellinen laajennos, jonka aste on pariton. Osoita, että $E = K(x^2)$.
   Vihje: Tarkastele astetta $[E : K(x^2)]$.

4. (a) Olkoon R rengas ja $b \in R$. Osoita, että kuvaus $\tau_b : R[X] \to R[X]$, missä $\sum_i a_i X^i \mapsto \sum_i a_i (X + b)^i$, on rengasisomorfismi. Päättele, että $f \in R[X]$ on jaoton, jos ja vain jos $\tau_b(f)$ on jaoton.
   (b) Olkoon p alkuluku. Osoita, että $X^p - 1 = (X - 1)g$, missä $g \in \mathbb{Z}[X]$ on jaoton kunnan $\mathbb{Q}$ suhteen.
   Vihje: tarkastele polynomia $\tau_1(X^p - 1)$ ja käytä Eisensteinin kriteeriä.

5. Olkoon $\alpha \in \mathbb{C}$ polynomin $f = X^3 + X^2 + X + 2$ juuri. Esitä $(\alpha - 1)^{-1}$ muodossa $a\alpha^2 + b\alpha + c$, missä $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

*6. Määritä seuraavisa tapauksissa joukon A virittämän laajennoksen L/K alilaajennoksen $K(A)$ aste:
   (a) $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{R}$, $A = \{\sqrt{2}\}$.
   (b) $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{C}$, $A = \{\sqrt{2}, i\}$.
   (c) $K = \mathbb{F}_2$, $L = \mathbb{F}_2[X]/\langle X^5 + X^3 + 1 \rangle$, $A = \{\overline{X}^2\}$.

$*$:lla merkityt tehtävät ovat palautettaviksi kelpaavia (tarkempaa tietoa palautettavista tehtävistä kurssin kotisivulla).