Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra II
Kevät 2011
Harjoitus 10

1. Osoita, että polynomit X^2-X+1 ja X^3+X+1 ovat jaottomia renkaassa $\mathbb{F}_2[X]$ mutta eivät renkaassa $\mathbb{F}_3[X]$. Muodosta vastaavat kunnan $\mathbb{F}_2$ laajennokset ja ratkaise niissä yhtälöt $a^3 = 1$ ja $b^4 + b^2 = 1$.

2. (a) Olkoon R rengas. Osoita, että $R[X,Y] \cong R[X][Y]$ R-algebroina.
   (b) Osoita, että jos R on kokonaisalue, joka ei ole kunta, niin $R[X]$ ei ole pääideaalirengas. Päättele tämän avulla, että $\mathbb{Z}[X]$ ei ole pääideaalirengas. (Vihje: tarkastele ideaalia $\langle X, c\rangle$, missä $c \neq 0$ ei ole R:n yksikkö.)
   (c) Osoita (b)-kohdan avulla, että jos K on kunta ja $n \geq 2$, niin $K[X_1, \ldots, X_n]$ ei ole pääideaalirengas.

3. Osoita, että jos F on kunta ja $f, g \in F[X]$ ja $\deg(g) \geq 1$, niin on olemassa yksikäsitteiset polynomit $f_0, f_1, \ldots, f_r \in F[X]$ s.e. $\deg(f_i) < \deg(g)$ kaikilla i ja
$$f = f_0 + f_1 g + f_2 g^2 \cdots + f_r g^r.$$

*4. Osoita, että Eukleideen rengas on pääideaalirengas.

5. Olkoon A kokonaisalue ja $P = A\backslash\{0\}$.
   (a) Osoita, että
$$xA^* \leq yA^* \Leftrightarrow x|y$$
   on hyvinmääritelty järjestysrelaatio tekijämonoidissa P/A^*.
   (b) Olkoon E järjestetyn joukon P/A^* epätyhjä osajoukko. Osoita, että mikäli E:ssä ei ole minimaalista alkiota, niin P:ssä on sellainen jono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, että $x_{n+1}|x_n$ ja $x_n \nmid x_{n+1}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

*6. Olkoon A tekijöihinjakorengas ja $x, y \in A\backslash\{0\}$ keskenään jaottomat. Osoita:
   (a) Jos $z \in A\backslash\{0\}$, $x|z$ ja $y|z$, niin $xy|z$ eli xy on x:n ja y:n pienin yhteinen kerrannainen.
   (b) Jos $z \in A\backslash\{0\}$ ja $x|yz$, niin $x|z$.

$*$:lla merkityt tehtävät ovat palautettaviksi kelpaavia (tarkempaa tietoa palautettavista tehtävistä kurssin kotisivulla).