Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra II
Kevät 2011
Harjoitus 1

1. Olkoon A joukko ja B sen osajoukko ($B \neq \emptyset, A$). Olkoon $E = \mathcal{P}(A)$ laskutoimituksella

$$\text{a) } (X, Y) \mapsto X \cap Y \text{ tai b) } (X, Y) \mapsto X \cup Y$$

varustettu monoidi. Tutki, onko
(1) $F = \mathcal{P}(B)$ monoidin E alimonoidi,
(2) $X \mapsto X \cup B$ monoidihomomorfismi $E \to E$,
(3) $X \mapsto X \cap B$ monoidihomomorfismi $E \to E$ tai $E \to F$.

*2. Olkoon $(M, \circ)$ monoidi. Alkio $x \in M$ on
- *vasemmalta kääntyvä*, jos on olemassa $y \in M$, jolla $y \circ x = e$,
- *oikealta kääntyvä*, jos on olemassa $y \in M$, jolla $x \circ y = e$,
- *kääntyvä*, jos on olemassa $y \in M$, jolla $x \circ y = e = y \circ x$.

a) Osoita, että monoidin alkio on kääntyvä, jos ja vain jos se on vasemmalta ja oikealta kääntyvä.
b) Osoita, että äärellisen monoidin alkio on kääntyvä, jos ja vain jos se on vasemmalta tai oikealta kääntyvä. (Vihje: Jos x on tarkasteltava alkio, tarkastele kuvauksia $y \mapsto x \circ y$ ja $y \mapsto y \circ x$.)

3. Tarkastellaan jäännösluokkarengasta $\mathbb{Z}_{10} = \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, alkioina jäännösluokat $\bar{n}$ modulo 10 ja laskutoimituksina tavanomaiset jäännösluokkien yhteen- ja kertolaskut. Osoita, että osajoukko $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\} \subset \mathbb{Z}_{10}$ on rengas, muttei renkaan $\mathbb{Z}_{10}$ alirengas. Mikä on osajoukon $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$ virittämä alirengas?

4. Olkoot $m, n \in \mathbb{N}$ ja $m \geq 1$. Olkoon $R_{m,n}$ $\mathbb{N}$:n ekvivalenssirelaatio

$$x = y \text{ tai } (x \geq n \text{ ja } y \geq n \text{ ja } m | x - y).$$

Osoita, että additiivisen monoidin $\mathbb{N}$ yhteenlasku ja ekvivalenssirelaatio $R_{m,n}$ ovat yhteensopivat ja kuvaile tekijämonoidia $\mathbb{N}/R$.

*5. Olkoot G, H_1 ja H_2 ryhmiä ja $f_i : G \to H_i$ ($i = 1, 2$) ryhmähomomorfismeja, joilla $\mathrm{Ker}(f_1) \subseteq \mathrm{Ker}(f_2)$. Osoita, että on olmeassa tasan yksi ehdon $f_2 = f \circ f_1$ täyttävä ryhmähomomorfismi $f : \mathrm{Im}(f_1) \to H_2$ ja että tällöin $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f_2)$ ja $\mathrm{Ker}(f) = f_1(\mathrm{Ker}(f_2))$.

6. Olkoon H ryhmän G aliryhmä. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:
(i) H on G:n normaali aliryhmä.
(ii) Kaikilla $x, y \in G$, jos $xH = yH$ niin $x^{-1}H = y^{-1}H$.
Päättele ylläolevasta, että jos H:n indeksi $[G : H] = 2$, niin H on G:n normaali aliryhmä.

$*$:lla merkityt tehtävät ovat palautettaviksi kelpaavia (tarkempaa tietoa palautettavista tehtävistä kurssin kotisivulla).