8. Modulikonstruktioita

8.1. Vapaat modulit. Vektoriavaruuden tärkeimpiä ominaisuuksia on, että sen vektorit voidaan ilmaista yksikäsitteisesti kantavektorien yhdistelminä. Tässä luvussa tarkastellaan moduleja, joilla on vastaava ominaisuus.

Olkoon X joukko R-modulin M alkioita. Mitä tahansa äärellistä summaa $\sum_i r_i x_i$, missä $r_i \in R$ ja $x_i \in X$ kaikilla i, kutsutaan joukon X *lineaariseksi yhdistelmäksi* eli *lineaarikombinaatioksi.* Jos jokainen modulin M alkio voidaan ilmaista joukon X lineaarikombinaationa, sanotaan, että X *virittää* modulin M. Edelleen, jos kullakin lineaarikombinaatiolla pätee $\sum_i r_i x_i = 0$ ainoastaan siinä tapauksessa, että $r_i = 0$ kaikilla i, sanotaan, että osajoukko X on *lineaarisesti riippumaton* eli *vapaa.* Jos osajoukko ei ole vapaa, se on *sidottu.*

MÄÄRITELMÄ 8.1. Olkoon M jokin R-moduli. Osajoukkoa $B \subset M$ kutsutaan modulin M *kannaksi*, jos B virittää modulin M ja on lineaarisesti riippumaton. Jos tällainen osajoukko löytyy, modulia M kutsutaan *vapaaksi.*

Vapaassa modulissa jokainen alkio voidaan esittää kannan alkioiden lineaarikombinaationa. Tämä esitys on lisäksi yksikäsitteinen, sillä jos $\sum_i r_i b_i = \sum_i r'_i b_i$, niin $\sum_i (r_i - r'_i) b_i = 0$, ja koska joukko B on vapaa, tästä seuraa, että $r_i = r'_i$ kaikilla i.

Esimerkkejä vapaista moduleista:

- Lineaarialgebran peruskurssilla on osoitettu, että jokaisella äärellisellä $\mathbb{R}$-vektoriavaruudella on kanta, joten jokainen tällainen vektoriavaruus on vapaa $\mathbb{R}$-moduli. Sama todistus toimii millä tahansa kerroinkunnalla. Myös äärettömillä vektoriavaruuksilla on kanta, mutta tämän seikan todistamiseen tarvitaan Zornin lemmaa.
- Mikä tahansa rengas R on vapaa R-moduli, kantana yksiö $\{1\}$. Yleisemmin, tulomoduli R^n on vapaa, ja sen *luonnollinen kanta* koostuu alkioista $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (ykkösalkio i:nnellä paikalla).
- Jos R on rengas, R-alkioisten $n \times m$-matriisien joukko $R^{n \times m}$ on R-moduli, laskutoimituksina matriisien yhteenlasku ja skalaarikertolasku. Luonnollisen kannan muodostavat alkeismatriisit E_{ij}, joissa on rivillä i ja sarakkeessa j renkaan R ykkösalkio ja muut alkiot ovat nollia.
- Vaihdannaista ryhmää kutsutaan vapaaksi, jos se on vapaa $\mathbb{Z}$-modulina. Rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ ei ole vapaa ryhmä. Myöskään jäännösluokkaryhmä $\mathbb{Z}_n$ ei ole vapaa, mikä seuraa muun muassa alempana todistettavasta lauseesta 8.4. Tuo lause osoittaa, että jokainen vapaa ryhmä on isomorfinen ryhmistä $\mathbb{Z}$ koostuvan suoran summan kanssa; erityisesti siis jokainen vapaa ryhmä on ääretön.

Vapaisiin moduleihin liittyy seuraava universaaliominaisuus. Sen mukaan jokainen vapaassa modulissa määritelty lineaarikuvaus määräytyy täysin kannan alkioiden kuvien perusteella.

LAUSE 8.2. *Olkoon M vapaa R-moduli, jolla on kanta B, ja olkoon $\iota\colon B \to M$ inkluusiokuvaus. Oletetaan lisäksi, että N on jokin toinen R-moduli ja $f\colon B \to N$ on mikä tahansa kuvaus. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen R-lineaarinen kuvaus*

$\varphi\colon M \to N$, jolle pätee $\varphi(b) = f(b)$ kaikilla $b \in B$, eli oheinen kaavio kommutoi.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, hook, "\iota"'] & & N \\ & M \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Lisäksi

i) *φ on injektiivinen, jos ja vain jos kuvajoukko fB on vapaa*
ii) *φ on surjektiivinen, jos ja vain jos kuvajoukko fB virittää modulin N.*

Todistus. Jokaisella vapaan modulin alkiolla $x \in M$ on yksikäsitteinen esitys $x = \sum_i r_i b_i$ kannan alkioiden lineaarikombinaationa. Jos $\varphi\colon M \to N$ on lineaarikuvaus, jolle pätee $\varphi(b) = f(b)$ kaikilla $b \in B$, niin

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_i r_i b_i\right) = \sum_i r_i \varphi(b_i) = \sum_i r_i f(b_i). \tag{8.3}$$

Halutun lineaarikuvauksen on siis toteutettava yllä oleva ehto jokaisella x, joten kuvaus on yksikäsitteinen, jos se on olemassa.

Toisaalta mikään ei estä määrittelemästä kuvausta $\varphi\colon M \to N$ juuri ehdon (8.3) avulla. On lisäksi helppo tarkistaa, että kaavan $\sum_i r_i b_i \mapsto \sum_i r_i f(b_i)$ määrittelemä kuvaus on R-lineaarinen ja että tälle kuvaukselle pätee $b \mapsto f(b)$ kaikilla kannan alkioilla b. Näin saatava kuvaus siis toteuttaa vaaditut ehdot.

Lisäväitteiden todistaminen jätetään harjoitustehtäväksi. □

Kun rengasta R ajatellaan R-modulina, voidaan muodostaa suora summa $\bigoplus_{i\in I} R$, jota merkitään $R^{(I)}$. Tämä on vapaa moduli. Sen *luonnollinen kanta* koostuu alkioista $e_j = (\delta_{ij})_{i\in I}$, missä $j \in I$ ja

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jos } i = j \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

Kannan alkiot ovat siis ykkösalkion kuvia kanonisissa injektioissa $\iota_i\colon R \to \bigoplus_i R$. Osoittautuu, että jokainen vapaa moduli on isomorfinen tällaisen suoran summan kanssa.

Lause 8.4. *Jos M on vapaa R-moduli, niin $M \cong R^{(I)}$ jollain I.*

Todistus. Olkoon $B = \{b_i\}_{i\in I}$ vapaan modulin M kanta. Määritellään kuvaus $f\colon B \to R^{(I)}$ kaavalla $f(b_i) = e_i$. Universaaliominaisuuden 8.2 nojalla on olemassa R-lineaarinen kuvaus $\varphi\colon M \to R^{(I)}$, jolle pätee $\varphi(b_i) = e_i$ kaikilla i. Saman lauseen loppuosan perusteella φ on bijektiivinen, koska joukko $\{e_i\}$ on modulin $R^{(I)}$ kanta. □

Nyt vapaan modulin universaaliominaisuus voidaan tulkita uudella tavalla: Jokaista joukkoa I kohti voidaan konstruoida "universaali" R-moduli $R^{(I)}$. Tässä modulissa joukon I alkio i samastetaan yleensä luonnollisen kannan alkion e_i kanssa. Tällöin mikä tahansa kuvaus f joukolta I johonkin R-moduliin N voidaan laajentaa homomorfismiksi $\varphi\colon R^{(I)} \to N$.

Esimerkki 8.5. Olkoon R rengas ja X jokin joukko. Samastetaan kukin alkio $x \in X$ vapaan modulin $R^{(X)}$ kanta-alkion e_x kanssa. Tällöin vapaan modulin mielivaltainen alkio voidaan kirjoittaa muodollisena lineaarikombinaationa

$$\sum_x r_x x = \sum_x r_x e_x.$$

Tällä tavoin minkä tahansa joukon X päälle voidaan konstruoida modulirakenne, jota kutsutaan *joukon X virittämäksi vapaaksi moduliksi.*

Erityisesti, jos $R = \mathbb{Z}$ ja $n \in R$, alkiota nx voidaan pitää x:n muodollisena monikertana. Tällä tavoin saadaan joukon X virittämä vapaa vaihdannainen ryhmä. Tässä ryhmässä joukon X alkioita voidaan lisätä yhteen ja vähentää toisistaan.

Esimerkiksi algebrallisessa topologiassa törmätään tilanteeseen, jossa joukko X koostuu jonkin topologisen avaruuden T eräänlaisista yleistetyistä kolmioista eli *simplekseistä.* (Nämä ovat tarkemmin sanoen euklidisten kolmioiden ja niiden n-ulotteisten vastineiden, kuten tetraedrien, kuvia jatkuvissa kuvauksissa.) Vapaassa ryhmässä $\mathbb{Z}^{(X)}$ voidaan simplekseistä luoda erilaisia lineaarikombinaatioita, ja tätä ryhmää tutkimalla saadaan tietoa avaruuden T rakenteesta.

8.2. Tensoritulot. Monet vektoriavaruuksissa määriteltävät tulot ovat lineaarisia molempien tekijöiden suhteen, eli *bilineaarisia.* Jos vektorien tuloa merkitään $(x, y) \mapsto x \otimes y$, bilineaarisuus tarkoittaa siis sitä, että

$$\begin{aligned} &(x+y)\otimes z = x\otimes z + y\otimes z, && (ax)\otimes y = a(x\otimes y) \\ \text{sekä}\quad &x\otimes(y+z) = x\otimes y + x\otimes z, && x\otimes(ay) = a(x\otimes y). \end{aligned}$$

Esimerkiksi tavallinen pistetulo $x \cdot y$ ja kolmiulotteisen reaaliavaruuden ristitulo $x \times y$ ovat bilineaarisia tuloja. Seuraavassa yleistetään bilineaarisen tulon käsite mielivaltaisille moduleille, ja tarkastellaan modulien *tensorituloa*, jossa voidaan määritellä eräänlainen universaali bilineaarinen tulo.

Määritelmä 8.6. Olkoot M, N ja P kolme R-modulia. Kuvausta f joukolta $M \times N$ moduliin P kutsutaan *R-bilineaariseksi*, jos se on lineaarinen molempien komponenttien suhteen, eli kaikilla $x, y \in M$, $z, w \in N$ sekä $a \in R$ pätee

(B1) $f(x + y, z) = f(x, z) + f(y, z)$
(B2) $f(x, z + w) = f(x, z) + f(x, w)$
(B3) $f(ax, z) = af(x, z)$
(B4) $f(x, az) = af(x, z)$.

Esimerkiksi reaaliavaruuden pistetulo on bilineaarinen kuvaus $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Yleisessä tapauksessa modulien M ja N ei kuitenkaan tarvitse olla samat. Huomaa, että bilineaarisessa kuvauksessa pätevät kaavat $f(x, 0) = 0$ ja $f(0, y) = 0$, sillä esimerkiksi $f(x, 0) = f(x, 0.0) = 0.f(x, 0) = 0$.

Olkoot M ja N mielivaltaisia R-moduleja. Ryhdytään konstruoimaan modulia T, jolle voidaan määritellä bilineaarinen kuvaus $M \times N \to T$, $(x, y) \mapsto x \otimes y$. Ideana on lähteä liikkeelle modulista, jonka alkioita ovat parien (x, y) muodostamat lineaarikombinaatiot. Näitä pareja voidaan pitää muodollisina tuloina. Sen jälkeen samastetaan alkioita niin, että bilineaarisuusehdot täyttyvät: esimerkiksi jokainen pari $(x + y, z)$ samastetaan lineaarikombinaation $(x, z) + (y, z)$ kanssa.

Olkoon C vapaa R-moduli $R^{(M\times N)}$. Tämän modulin luonnollisen kannan muodostavat alkioperheet $e_{(x,y)}$, missä $(x,y)\in M\times N$. Kuten tapana on, samastetaan jokainen kanta-alkio vastaavan parin (x,y) kanssa. Tällöin C koostuu kyseisten parien lineaarikombinaatioista, joiden kertoimet ovat renkaassa R. Tarkastellaan seuraavia neljää muotoa olevia lineaarikombinaatioita, missä $x,y\in M$, $z,w\in N$ ja $a\in R$:

$$\begin{aligned}
&(x+y,z)-(x,z)-(y,z)\\
&(x,z+w)-(x,z)-(x,w)\\
&(ax,z)-a(x,z)\\
&(x,az)-a(x,z).
\end{aligned}$$

Olkoon D se modulin C alimoduli, jonka virittävät yllä mainitut lineaarikombinaatiot.

Määritelmä 8.7. Kahden R-modulin M ja N *tensoritulo* $M\otimes_R N$ on tekijämoduli C/D, missä $C=R^{(M\times N)}$ ja D on edellä määritelty alimoduli. Jos kerroinrengas on asiayhteydestä selvä, tensorituloa voidaan merkitä myös $M\otimes N$.

Parin (x,y) ekvivalenssiluokkaa tekijämodulissa C/D merkitään $x\otimes y$. (Tämä on oikeastaan perheen $e_{(x,y)}$ ekvivalenssiluokka, mutta tämä perhe samastettiin parin (x,y) kanssa.) Koska parit (x,y) virittävät vapaan modulin C, niiden ekvivalenssiluokat virittävät modulin C/D. Jokainen tensoritulon $M\otimes N$ alkio voidaan siis esittää alkioiden $x\otimes y$ lineaarikombinaationa. Tensorituloon liittyy kanoninen kuvaus $\eta\colon M\times N\to M\otimes N$, jolle pätee $\eta(x,y)=x\otimes y$. Kanoninen kuvaus on R-bilineaarinen.

Tensoritulossa virittäjien $x\otimes y$ lineaarikombinaatiot voidaan esittää summina ilman skalaarikertoimia. Jos nimittäin $r_i\in R$, $x_i\in M$ ja $y_i\in N$ kaikilla i, niin

$$\sum_i r_i(x_i\otimes y_i)=\sum_i (r_ix_i)\otimes y_i,$$

ja $r_ix_i\in M$ kaikilla i. Tensoritulon yleinen alkio voidaan siis kirjoittaa muodossa $\sum_i x_i\otimes y_i$.

Esimerkki 8.8. Oletetaan, että m ja n ovat keskenään jaottomia luonnollisia lukuja, ja tarkastellaan $\mathbb{Z}$-modulien $\mathbb{Z}_m$ ja $\mathbb{Z}_n$ tensorituloa. Koska m ja n ovat keskenään jaottomat, löytyy kokonaisluvut a ja b, joille pätee $am+bn=1$. Tällöin alkiolle $\overline{x}\otimes\overline{y}\in\mathbb{Z}_m\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_n$ pätee

$$\begin{aligned}
\overline{x}\otimes\overline{y}&=(am+bn).(\overline{x}\otimes\overline{y})=am.(\overline{x}\otimes\overline{y})+bn.(\overline{x}\otimes\overline{y})\\
&=a.(m\overline{x}\otimes\overline{y})+b.(\overline{x}\otimes n\overline{y})=a.(\overline{0}\otimes y)+b.(x\otimes\overline{0})=0.
\end{aligned}$$

Koska tensoritulon $\mathbb{Z}_m\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_n$ jokainen virittäjäalkio on nolla, tensoritulo on triviaali moduli.

Tensoritulon ominaisuuksia todistettaessa ei ole yleensä tarpeellista palata tensoritulon määritelmään, vaan voidaan käyttää seuraavaa universaaliominaisuutta.

Lause 8.9. *Olkoot M, N ja P joitain R-moduleja, ja olkoon $f\colon M\times N\to P$ jokin R-bilineaarinen kuvaus R-modulille P. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen*

R-lineaarinen kuvaus $\varphi\colon M \otimes_R N \to P$, jolle pätee $\varphi(x \otimes y) = f(x,y)$ kaikilla $x \in M$ ja $y \in N$, eli oheinen kaavio kommutoi.

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\eta"'] & & P \\ & M \otimes_R N \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Todistus. Koska parit (x,y), missä $x \in M$ ja $y \in N$, muodostavat vapaan modulin $C = R^{(M\times N)}$ kannan, voidaan f laajentaa lineaarikuvaukseksi $g\colon C \to P$ yksikäsitteisesti vapaan modulin universaaliominaisuuden perusteella. Olkoon u jokin tensoritulon konstruktiossa määritellyn alimodulin D virittäjäalkio. Tällöin $g(u) = 0$, koska f on bilineaarinen: esimerkiksi jos $u = (ax,y) - a(x,y)$, niin

$$g(u) = g\big((ax,y) - a(x,y)\big) = g(ax,y) - ag(x,y) = f(ax,y) - af(x,y) = 0.$$

Koska $g(u) = 0$ jokaisella D:n virittäjällä u, niin $D \subset \operatorname{Ker} f$. Siispä on olemassa yksikäsitteinen R-modulien homomorfismi $\varphi\colon C/D \to P$, jolle pätee $g = \varphi \circ \pi$, missä π on kanoninen surjektio. Nyt kaikilla $(x,y) \in M \times N$ pätee $x \otimes y = \pi(x,y)$, joten

$$\varphi(x \otimes y) = \varphi(\pi(x,y)) = g(x,y) = f(x,y).$$

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota"'] & P \\ C \arrow[r, "\pi"'] \arrow[ur, dashed, "g"'] & C/D \arrow[u, dashed, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Kuva 14. Lauseen 8.9 todistukseen liittyvä kommutoiva kaavio. Yläkolmio saadaan vapaan modulin universaaliominaisuudesta ja alakolmio modulien homomorfialauseesta. Kuvaus ι on inkluusiokuvaus, ja $\eta = \pi \circ \iota$.

□

Esimerkki 8.10. Universaaliominaisuuden perusteella joukolta $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ ei ole olemassa epätriviaalia $\mathbb{Z}$-bilineaarista kuvausta millekään modulille P. Jos näet $f\colon \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \to P$ on bilineaarinen, on olemassa lineaarikuvaus $\varphi\colon \mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \to P$, jolle $\varphi \circ \eta = f$. Aiemmin nähtiin, että $\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n = 0$, joten kuvauksen φ täytyy olla nollakuvaus. Tästä seuraa, että myös f on nollakuvaus.

Seuraavassa lauseessa luetellaan joitakin tensoritulon ominaisuuksia.

Lause 8.11. *Olkoot M, N ja P kolme R-modulia. Tällöin on olemassa seuraavat yksikäsitteiset R-modulien isomorfismit:*

i)	$M \otimes N \cong N \otimes M$,	*missä* $x \otimes y \mapsto y \otimes x$
ii)	$(M \otimes N) \otimes P \cong M \otimes (N \otimes P)$,	*missä* $(x \otimes y) \otimes z \mapsto x \otimes (y \otimes x)$
iii)	$(M \oplus N) \otimes P \cong (M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$,	*missä* $(x,y) \otimes z \mapsto (x \otimes z, y \otimes z)$
iv)	$R \otimes M \cong M$,	*missä* $a \otimes x \mapsto a.x$.

Viimeisessä kohdassa rengasta R ajatellaan R-modulina.

Todistus. Todistetaan kohta (i) ja jätetään muut harjoitustehtäviksi. Määritellään kuvaukset $f\colon M \times N \to N \otimes M$ ja $g\colon N \times M \to M \otimes N$ kaavoilla

$$f(x,y) = y \otimes x \qquad \text{ja} \qquad g(y,x) = x \otimes y.$$

Nämä kuvaukset ovat selvästi bilineaarisia, joten lauseen 8.9 perusteella on olemassa yksikäsitteiset lineaarikuvaukset $\varphi\colon M \otimes N \to N \otimes M$ ja $\psi\colon N \otimes M \to M \otimes N$, joille pätee $\varphi(x \otimes y) = f(x,y) = y \otimes x$ ja $\varphi(y \otimes x) = g(y,x) = x \otimes y$ kaikilla $x \in M$ ja $y \in N$. Lisäksi $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$ ja $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$, joten φ ja ψ ovat toistensa käänteiskuvauksia ja siten isomorfismeja. □

Huomautus. Edellistä lausetta voi tulkita siten, että R-modulit muodostavat ikään kuin oman algebrallisen struktuurinsa, joiden laskutoimitukset $\oplus$ ja $\otimes$ toteuttavat lauseessa mainitut kohdat (i)–(iv). Kertolaskun $\otimes$ "neutraalialkio" on kerroinrengas R.

Osoittautuu, että universaaliominaisuus määrittelee tensoritulon isomorfiaa vaille täydellisesti. Universaaliominaisuutta voidaan tämän vuoksi käyttää määritelmän sijasta tensorituloon liittyvissä todistuksissa.

Lause 8.12. *Olkoot M, N ja Q kolme R-modulia, ja olkoon g jokin R-bilineaarinen kuvaus $M \times N \to Q$. Oletetaan, että* $\operatorname{Im} g$ *virittää modulin Q ja että seuraava sääntö on voimassa: jos f on mikä tahansa R-bilineaarinen kuvaus tulolta $M \times N$ modulille P, niin on olemassa sellainen R-lineaarinen kuvaus $\psi\colon Q \to P$, että $f = \psi \circ g$. Tällöin $Q \cong M \otimes_R N$, ja isomorfismille pätee $g(x,y) \mapsto x \otimes y$.*

Todistus. Koska kuvaus g on bilineaarinen, tensoritulon universaaliominaisuuden perusteella löytyy lineaarikuvaus $\varphi\colon M \otimes N \to Q$, jolle $\varphi \circ \eta = g$. Toisaalta kanoninen kuvaus η on bilineaarinen, joten oletuksen nojalla löytyy lineaarikuvaus $\psi\colon Q \to M \otimes N$, jolle pätee $\psi \circ g = \eta$.

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\eta"'] & & Q \\ & M \otimes N \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \times N \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "g"'] & & M \otimes N \\ & Q \arrow[ur, dashed, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Osoitetaan, että φ on kuvauksen ψ käänteiskuvaus. Selvästi $\mathrm{id} = \mathrm{id}_{M \otimes N}$ on R-lineaarinen kuvaus, jolle pätee $\mathrm{id} \circ \eta = \eta$. Toisaalta myös $\psi \circ \varphi$ on R-lineaarinen, ja

$$(\psi \circ \varphi) \circ \eta = \psi \circ g = \eta.$$

Tensoritulon universaaliominaisuuden mukaan tällaisia kuvauksia voi olla vain yksi, joten $\mathrm{id} = \psi \circ \varphi$.

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "\eta"'] & & M \otimes N \\ & M \otimes N \arrow[ur, shift left, "\mathrm{id}"] \arrow[ur, shift right, "\psi\circ\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Olkoon sitten $u \in Q$ mielivaltainen. Koska kuvajoukko $\operatorname{Im} g$ virittää modulin Q, voidaan kirjoittaa $u = \sum_i g(x_i, y_i)$ joillain $x_i \in M$ ja $y_i \in N$. Toisaalta nähdään, että

$$(\varphi \circ \psi) \circ g = \varphi \circ \eta = g,$$

joten

$$(\varphi \circ \psi)(u) = \sum_i (\varphi \circ \psi)(g(x_i, y_i)) = \sum_i g(x_i, y_i) = u.$$

Näin ollen $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$, ja φ on kuvauksen ψ käänteiskuvaus. Siispä $\psi\colon Q \to M \otimes N$ on R-modulien isomorfismi, jolle pätee $\psi(g(x, y)) = \eta(x, y) = x \otimes y$. □

Esimerkki 8.13. Olkoon R jokin rengas. Tarkastellaan vapaita tulomoduleja R^m ja R^n. Merkitään symbolilla $R^{m\times n}$ joukkoa, jonka alkioita ovat R-kertoimiset $m\times n$-matriisit. Nämä matriisit muodostavat vapaan R-modulin. Sen luonnollisena kantana ovat alkeismatriisit E_{ij}, joissa rivillä i ja sarakkeessa j on ykkösalkio ja muualla 0. Alkioiden $x = (x_1, \ldots, x_m)$ ja $y = (y_1, \ldots, y_n)$ *ulkotulo* eli *dyaditulo* $g(x, y)$ määritellään matriisina

$$g(x, y) = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n \end{bmatrix}.$$

Kuvaus $g\colon R^m \times R^n \to R^{m\times n}$ on R-bilineaarinen.

Osoitetaan, että $R^{m\times n} \cong R^m \otimes R^n$ käyttämällä lausetta 8.12. Selvästi $\operatorname{Im} g$ virittää modulin $R^{m\times n}$, sillä $g(e_i, e_j) = E_{ij}$. Olkoon sitten $f\colon R^m \times R^n \to P$ bilineaarinen kuvaus jollekin R-modulille P. Määritellään kuvaus φ alkeismatriiseilta moduliin P seuraavasti:

$$\varphi(E_{ij}) = f(e_i, e_j).$$

Vapaan modulin universaaliominaisuuden nojalla φ voidaan laajentaa yksikäsitteisellä tavalla koko modulin $R^{m\times n}$ lineaarikuvaukseksi. Jos $A = (a_{ij}) \in R^{m\times n}$, niin

$$\varphi(A) = \varphi\left(\sum_{i,j} a_{ij}E_{ij}\right) = \sum_{i,j} a_{ij} f(e_i, e_j).$$

Täten

$$\varphi(g(x, y)) = \sum_{i,j} x_iy_j f(e_i, e_j) = f\left(\sum_i x_ie_i, \sum_j y_je_j\right) = f(x, y)$$

kaikilla $(x, y) \in R^m \times R^n$. Siispä $f = \varphi \circ g$, joten lauseesta 8.12 saadaan, että $R^{m\times n} \cong R^m \otimes R^n$. Dyadituloa $g(x, y)$ vastaa tensoritulo $x \otimes y$.

Nyt nähdään, että reaaliavaruuksien tavalliset piste- ja ristitulo saadaan muokkaamalla universaalista tensoritulosta. Pistetulo $x \cdot y$ tulee matriisista $A = x \otimes y$ lineaarisella kuvauksella $A \mapsto \sum_i A_{ii}$, joka summaa yhteen kaikki lävistäjäalkiot. Kolmiulotteisen avaruuden ristitulo puolestaan saadaan kuvauksella

$$A \mapsto (A_{23} - A_{32},\ A_{31} - A_{13},\ A_{12} - A_{21}),$$

joka myös on $\mathbb{R}$-lineaarinen.

Tarkastellaan lopuksi erästä tensoritulon sovellusta, jota nimitetään *skalaarien laajennukseksi*. Olkoot R ja S renkaita, ja olkoon $f\colon R \to S$ rengashomomorfismi. Nyt rengasta S voidaan ajatella R-modulina, kun skalaarikertolasku määritellään

kaavalla $a.b = f(a) \cdot b$. Jos M on jokin R-moduli, niin voidaan muodostaa tensoritulo

$$M_S = S \otimes_R M.$$

Tämä tensoritulo on S-moduli, kun määritellään $b'.(b \otimes x) = (b'b) \otimes x$ kaikilla alkioilla $b, b' \in S$ ja $x \in M$. Sanotaan, että M_S on saatu modulista M *skalaareja laajentamalla.* Usein R on itse asiassa renkaan S alirengas, ja $f\colon R \to S$ on inkluusiokuvaus. Jos $S = R$ ja f on identtinen kuvaus, niin $M_R \cong M$ lauseen 8.11 perusteella.

Lemma 8.14. *Jos $M = R^n$, missä $n \in \mathbb{N}$, niin M_S ja S^n ovat isomorfisia S-moduleina.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lause 8.15. *Oletetaan, että R on kokonaisalue. Jos R^m ja R^n ovat isomorfisia R-moduleja, niin $m = n$.*

Todistus. Ideana on laajentaa skalaarirengas kunnaksi ja käyttää sitten dimension käsitettä. Merkitään $M = R^m$ ja $N = R^n$ ja oletetaan, että $M \cong N$. Olkoon K renkaan R osamääräkunta. (Osamääräkunta on renkaan R:n jakorengas joukon $R \setminus \{0\}$ suhteen. Tämä on kunta, koska R on kokonaisalue.) Kunnasta K saadaan R-moduli jakorenkaan kanonisen kuvauksen $\eta\colon R \to K$ avulla. Edellisen lemman perusteella

$$K^m \cong M_K \cong N_K \cong K^n.$$

Yllä olevat isomorfismit ovat K-vektoriavaruuksien isomorfismeja. Koska vektoriavaruuden dimensio on yksikäsitteinen, pätee $m = n$. □

Edellinen lause pätee myös, jos R on mikä tahansa vaihdannainen rengas eikä siis välttämättä kokonaisalue. Todistus on muuten samanlainen, mutta siinä skalaarit laajennetaan eri kuvauksen avulla.