Renkaat ja modulit

Tässä osassa käsiteltävät renkaat ovat vaihdannaisia, ellei toisin mainita.

6. Ideaalit

Tekijärenkaassa nollan ekvivalenssiluokka on alkuperäisen renkaan *ideaali*. Ideaalin käsitteen otti käyttöön Richard Dedekind (1831–1916), ja se pohjautuu Ernst Kummerin (1810–1893) keksimiin "ideaalisiin lukuihin". Käsitteen synty on lukuteoriassa: monissa lukualueissa kokonaislukujen yksikäsitteinen alkutekijöihin jako ei onnistu, mutta toisinaan tämä puute voidaan korvata jakamalla luvun virittämä ideaali niin sanottuihin alkuideaaleihin.

6.1. Määritelmä ja virittäminen. Ideaali on määritelmän mukaan renkaan additiivisen ryhmän aliryhmä A, jolle pätee $rA = Ar = A$ kaikilla renkaan alkioilla r. Jos rengas ei ole vaihdannainen, puhutaan erikseen vasemman- ja oikeanpuoleisista ideaaleista (joille pätee $rA = A$ tai $Ar = A$), ja ideaalilla tarkoitetaan sellaista aliryhmää, joka on sekä vasemman- että oikeanpuoleinen ideaali. Yhdistämällä aliryhmäkriteeri sekä ideaalisuusehto saadaan seuraava tulos.

Lause 6.1 (Ideaalisuuskriteeri). *Renkaan R osajoukko A on ideaali, jos ja vain jos*

(I1) $A \neq \emptyset$
(I2) $a - b \in A$ *kaikilla* $a, b \in A$
(I3) $ra \in A$ *kaikilla* $a \in A$ *ja* $r \in R$.

Renkaan osajoukon X virittämä ideaali on pienin ideaali, joka sisältää joukon X, ja sitä merkitään $\langle X \rangle$. Yhden alkion virittämää ideaalia sanotaan *pääideaaliksi*. Pääideaalit ovat aina muotoa $\langle x \rangle = \{rx \mid r \in R\}$ (kun rengas on vaihdannainen).

Määritelmä 6.2. Rengas R on *pääideaalirengas*, jos se on kokonaisalue ja kaikki sen ideaalit ovat pääideaaleja.

Esimerkiksi kokonaislukujen rengas $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ on pääideaalirengas, sillä sen kaikki aliryhmät ovat muotoa $n\mathbb{Z} = \langle n \rangle$.

Toinen esimerkki pääideaalirenkaasta saadaan yhden muuttujan polynomeista, joiden kertoimet ovat jossain kunnassa. Ensin täytyy tarkistaa, että polynomirengas on kokonaisalue.

Lause 6.3. *Jos R on kokonaisalue, polynomirengas $R[X]$ on kokonaisalue.*

Todistus. On osoitettava, että jos f ja g ovat nollasta poikkeavia polynomeja, niin tulo $f \cdot g \neq 0$. Vakiopolynomeille tämä seuraa suoraan siitä, että R on kokonaisalue. Oletetaan siis, että $f = a_n X^n + \cdots + a_0$ ja $g = b_m X^m + \cdots + b_0$ ovat joukon $R[X]$ polynomeja, joista ainakin toinen ei ole vakio. Polynomien kertolaskusäännön mukaan tulon fg korkeimman asteen termi on $a_n b_m X^{n+m}$. Jos R on kokonaisalue ja a_n ja b_m ovat nollasta poikkeavia, niin myös $a_n b_m$ on nollasta poikkeava. Tulon aste on siis $n+m > 0$. Täten tulo ei voi olla vakiopolynomi, eikä siis myöskään nolla. □

Ylläoleva lause pätee myös useamman kuin yhden muuttujan polynomeille. Todistus on aivan samanlainen, joten se sivuutetaan.

Lause 6.4. *Jos K on kunta, polynomirengas $K[X]$ on pääideaalirengas.*

Todistus. Oletetaan, että A on renkaan $K[X]$ ideaali. Jos A sisältää jonkin vakiopolynomin $a \neq 0$, niin $a^{-1}a = 1 \in A$, jolloin $A = R = \langle 1 \rangle$. Toisaalta, jos $A = \{0\}$, niin $A = \langle 0 \rangle$. Voidaan siis olettaa, että $A \neq \{0\}$ ja A ei sisällä nollasta poikkeavia vakiopolynomeja.

Valitaan A:sta polynomi $g \neq 0$, jonka aste on pienin mahdollinen (välttämättä siis positiivinen). Jos nyt $f \in A$, niin polynomien jakoyhtälön perusteella pätee $f = gq + r$, missä r:n aste on pienempi kuin g:n. Toisaalta g:n aste on pienin A:n nollasta poikkeavien polynomien joukossa, joten $r = 0$. Näin ollen $f = gq$, ja koska tämä pätee kaikilla $f \in A$, voidaan päätellä, että $A = \langle g \rangle$. Täten $K[X]$ on pääideaalirengas. □

Useamman kuin yhden muuttujan polynomeille edellinen lause ei päde: esimerkiksi renkaassa $K[X, Y]$ ideaali $\langle X, Y \rangle$ ei ole minkään yhden polynomin f virittämä. Tämä johtuu siitä, että sekä X että Y ovat jaottomia. Jos nimittäin X olisi muotoa gf jollain g, niin joko f:n tai g:n täytyisi olla vakio. Edellinen tapaus on mahdoton, sillä $\langle X, Y \rangle$ ei sisällä vakioita, joten täytyy olla $g \in K$ ja $f = g^{-1}X$. Kuitenkaan Y ei ole joukossa $\langle g^{-1}X \rangle$.

Lause ei myöskään päde, jos K ei ole kunta: renkaassa $\mathbb{Z}[X]$ ideaali $\langle 2, X \rangle$ ei ole pääideaali. Todistuksessa ongelma tulee vastaan siinä, että vaikka 2 on vakiopolynomi, silti $1 \notin \langle 2, X \rangle$.

6.2. Alkuideaalit ja maksimaaliset ideaalit. Alkuideaalin käsite on keskeinen monissa renkaiden sovelluksissa. Maksimaaliset ideaalit puolestaan tuottavat kuntia. Oletetaan seuraavassa, että R on rengas ja A sen ideaali.

Määritelmä 6.5. Oletetaan, että $A \neq R$ ja kaikilla $x, y \in R$ pätee:

jos $xy \in A$, niin $x \in A$ tai $y \in A$.

Ideaalia A kutsutaan tällöin *alkuideaaliksi.*

Määritelmä 6.6. Ideaalia A kutsutaan *maksimaaliseksi*, jos $A \neq R$ ja millään ideaalilla B ei päde $A \subsetneq B \subsetneq R$.

Alkuideaalin määritelmä muistuttaa läheisesti kokonaisalueen määritelmää. Yhteys paljastuu seuraavassa lauseessa.

Lause 6.7. *Olkoon R rengas ja A sen ideaali. Tällöin*

(a) *A on alkuideaali, jos ja vain jos tekijärengas R/A on kokonaisalue*
(b) *A on maksimaalinen, jos ja vain jos tekijärengas R/A on kunta.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lauseesta saadaan nyt suoraan seuraava tulos.

Korollaari 6.8. *Jokainen maksimaalinen ideaali on alkuideaali.*

Esimerkki 6.9. Kokonaislukujen renkaassa kaikki ideaalit ovat muotoa $\langle n\rangle$ jollain $n \in \mathbb{Z}$. Jos $n = 0$, niin $\langle 0\rangle = \{0\}$ on alkuideaali, koska $\mathbb{Z}$ on kokonaisalue. Oletetaan sitten, että $n \neq 0$. Jos nyt $ab \in \langle n\rangle$ joillain $a, b \in \mathbb{Z}$, niin n jakaa tulon ab. Jos n on alkuluku, sen täytyy tällöin jakaa jompikumpi luvuista a ja b, joten jompikumpi näistä on ideaalissa $\langle n\rangle$. Kääntäen, jos $n = km$, missä kumpikaan luvuista k ja m ei ole 1 tai -1, niin $km \in \langle n\rangle$, vaikka k ja m eivät ideaalin alkioita. Lopputuloksena saadaan, että kokonaislukujen renkaassa $\langle n\rangle$ on alkuideaali, jos ja vain jos n on alkuluku tai nolla.

Toisaalta, jos p on alkuluku eli $\langle p\rangle$ on alkuideaali, tekijärengas $\mathbb{Z}/\langle p\rangle = \mathbb{Z}_p$ on äärellinen kokonaisalue. Siksi se on kunta, joten ideaali $\langle p\rangle$ on myös maksimaalinen. Voidaan siis päätellä, että ainoa $\mathbb{Z}$:n alkuideaali, joka ei ole maksimaalinen, on nollaideaali $\{0\}$.

Yleisemmin, pääideaalirenkaassa R jokainen nollasta poikkeava alkuideaali on maksimaalinen. Jos nimittäin $\langle x\rangle \neq \{0\}$ on alkuideaali ja lisäksi $\langle x\rangle \subsetneq \langle y\rangle$, niin $x \in \langle y\rangle$, eli $x = ry$ jollain $r \in R$. Tällöin $ry \in \langle x\rangle$, mutta $y \notin \langle x\rangle$, joten alkuideaalin määritelmän perusteella $r \in \langle x\rangle$. Edelleen $r = sx$ jollain $s \in R$, joten $x = ry = sxy$ eli $(1 - sy)x = 0$. Koska R on kokonaisalue, nähdään että $sy = 1$, mistä seuraa $R = \langle y\rangle$. Täten $\langle x\rangle$ on maksimaalinen.

Esimerkki 6.10. Olkoon K kunta, jolloin $K[X]$ on pääideaalirengas. Jos polynomi $\langle f\rangle \in K[X]$ on jaoton, sen virittämä ideaali on maksimaalinen. Jaottomuudella tarkoitetaan tässä sitä, että f ei ole vakio, ja jos $f = gh$ joillain $g, h \in K[X]$, niin toinen polynomeista g ja h on vakio.

Oletetaan väitteen todistamiseksi, että $\langle f\rangle \subset I$ jollain ideaalilla I. Koska $K[X]$ on pääideaalirengas, pätee $I = \langle g\rangle$ jollain $g \in K[X]$. Nyt $f \in \langle g\rangle$, joten $f = gh$ jollain $h \in K[X]$. Koska f on jaoton, joko g tai h on vakio. Edellisessä tapauksessa $\langle g\rangle = K[X]$, jälkimmäisessä $\langle g\rangle = \langle f\rangle$. Joka tapauksessa siis $\langle f\rangle$ on maksimaalinen.

Todistetaan seuraavaksi tulos, joka varmistaa alkuideaalien saatavuuden.

Lause 6.11 (Krull). *Jokaisella epätriviaalilla renkaalla on maksimaalinen ideaali.*

Lauseen todistus on perusesimerkki *Zornin*[13] *lemman* käytöstä. Koska Zornin lemma on luonteeltaan joukko-opillinen, on tässä yhteydessä hyvä hieman perehtyä siihen liittyviin käsitteisiin.

[13]Max August Zorn (1906–1993) oli saksalaissyntyinen amerikkalainen matemaatikko.

Zornin lemma on niin sanotun *valinta-aksiooman* toinen muotoilu, joka sopii hyvin erilaisten maksimaalisten rakenteiden olemassaolotodistuksiin. Valinta-aksiooma puolestaan on joukko-opin aksiooma, jota tarvitaan esimerkiksi ei-mitallisen joukon olemassaoloon tai joukkojen välisten mahtavuuksien vertailuun. Aksiooman mukaan mille tahansa epätyhjien joukkojen kokoelmalle voidaan määritellä kuvaus, joka antaa joukon arvoksi aina jonkin sen sisältämän alkion. Tällaista kuvausta kutsutaan yleensä *valintafunktioksi.*

Ongelma valinta-aksioomasta – tai yhtä hyvin Zornin lemmasta – riippuvissa olemassaolotodistuksissa on se, että todistuksen tuottamasta joukosta tai rakenteesta ei yleensä voida sanoa mitään täsmällistä. Tässä mielessä valinta-aksiooma on sen naiivin joukko-opin perussäännön vastainen, että jokaisesta alkiosta pitäisi pystyä sanomaan, kuuluuko se annettuun joukkoon vai ei. Muun muassa[14] tästä syystä on yleensä tapana mainita erikseen, jos todistuksessa nojaudutaan johonkin valinta-aksioomasta riippuvaan tulokseen.

Olkoon $\mathcal{P}$ jokin joukko ja $\leq$ sen kaksipaikkainen relaatio. Tarkastellaan seuraavia ehtoja:

(J1) Jos $a \leq b$ ja $b \leq c$, niin $a \leq c$ (transitiivisuus).
(J2) Jos $a \leq b$ ja $b \leq a$, niin $a = b$ (antisymmetrisyys).
(J3) Kaikilla $a, b \in \mathcal{P}$ pätee $a \leq b$ tai $b \leq a$.

Jos relaatio $\leq$ on transitiivinen ja antisymmetrinen, niin paria $(\mathcal{P}, \leq)$ kutsutaan *osittaisjärjestykseksi.* Jos myös ehto (J3) toteutuu, niin pari on *täydellinen järjestys* eli *lineaarijärjestys.* Jos sekaannuksen vaaraa ei ole, osittaisjärjestykseksi tai lineaarijärjestykseksi voidaan nimittää myös joukkoa $\mathcal{P}$ tai relaatiota $\leq$. *Ketju* on osittaisjärjestyksen osajoukko, joka on relaation $\leq$ suhteen lineaarijärjestys. Alkio $m \in \mathcal{P}$ on osajoukon $A \subset \mathcal{P}$ *yläraja*, jos kaikilla $a \in A$ pätee $a \leq m$. Alkio m on *maksimaalinen*, jos ei ole olemassa alkiota $a \in \mathcal{P}$, jolle pätisi $m \leq a$.

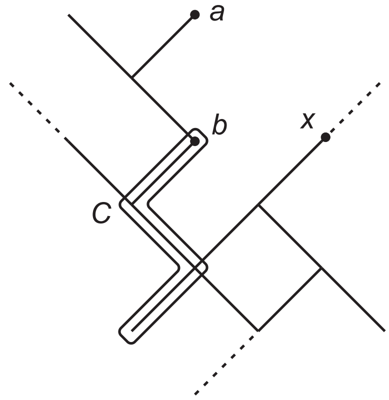
LEMMA 6.12 (Zornin lemma). *Oletetaan, että $\mathcal{P}$ on epätyhjä osittaisjärjestys, jossa jokaisella ketjulla on yläraja. Tällöin $\mathcal{P}$ sisältää maksimaalinen alkion.*

TODISTUS. Zornin lemma on yhtäpitävä joukko-opillisen valinta-aksiooman kanssa. Todistus sivuutetaan (ks. esim. Enderton: Elements of Set Theory). □

LAUSEEN 6.11 TODISTUS. Olkoon R epätriviaali rengas. Tarkastellaan kaikkien R:n aitojen ideaalien muodostamaa kokoelmaa $\mathcal{P}$. Tämä on osittaisjärjestys sisältymisrelaation $\subset$ suhteen. Lisäksi $\mathcal{P}$ on epätyhjä, koska se sisältää vähintään nollaideaalin $\{0\}$. Osoitetaan, että jokaisella ketjulla on yläraja tässä osittaisjärjestyksessä.

Olkoon $\mathcal{A}$ jokin ketju. Selvästi jokainen $\mathcal{A}$:n alkio sisältyy yhdisteeseen $\cup\mathcal{A}$, joten riittää osoittaa, että $\cup\mathcal{A} \in \mathcal{P}$ eli että $\cup\mathcal{A}$ on aito ideaali. Ensinnäkin se on epätyhjä, koska $0 \in \{0\} \in \mathcal{A}$. Oletetaan, että $r \in R$ ja $a, b \in \cup\mathcal{A}$. Nyt löytyy jotkin ideaalit A ja B, joille pätee $a \in A$ ja $b \in B$. Koska $\mathcal{A}$ on ketju, voidaan olettaa,

[14] Toinen syy on se, että valinta-aksiooman hyväksyminen todistuksen lähtökohdaksi voi johtaa paradoksaaliselta vaikuttaviin tuloksiin. Eräs tunnettu esimerkki on Banachin-Tarskin paradoksi, jossa valinta-aksiooman avulla konstruoidaan suljetun kuulan jako äärellisen moneen osaan, jotka uudelleenjärjestämällä saadaan kaksi alkuperäisen kokoista kuulaa.



Kuva 13. Osa erästä osittaisjärjestystä. Tässä järjestyksessä pätee $b \leq a$, mutta alkiota x ei voi vertailla a:n tai b:n kanssa. Sekä a että b ovat molemmat ketjun C ylärajoja, ja a on maksimaalinen alkio.

että $A \subset B$. Tällöin $a, b \in B$, ja koska B on ideaali, myös $a - b \in B$ ja $ra \in B$. Näin ollen

$$a - b \in \cup\mathcal{A} \quad \text{ja} \quad ra \in \cup\mathcal{A},$$

joten ideaalikriteerin perusteella $\cup\mathcal{A}$ on ideaali. Lisäksi $\cup\mathcal{A} \neq R$, koska kaikilla $B \in \mathcal{P}$ pätee $1 \notin B$. Yhdiste $\cup\mathcal{A}$ on siis eräs ketjun $\mathcal{A}$ yläraja.

Zornin lemman perusteella joukossa $\mathcal{P}$ on maksimaalinen alkio, joka on samalla haluttu maksimaalinen ideaali. □

Krullin lauseen todistusta hieman muuttamalla saadaan seuraava yleisempi tulos. Se voidaan myös johtaa seurauksena Krullin lauseesta.

Korollaari 6.13. *Jos $A \neq \{0\}$ on renkaan R ideaali, niin on olemassa R:n maksimaalinen ideaali, joka sisältää A:n.*

Jos rengas R ei ole vaihdannainen, alkuideaalin määritelmä muuttuu hieman. Tässä tapauksessa sanotaan, että ideaali A on alkuideaali, jos $A \neq R$ ja kaikilla ideaaleilla B ja C pätee

$$BC \subset A \quad \Rightarrow \quad B \subset A \quad \text{tai} \quad C \subset A.$$

Tämä ehto voidaan lausua alkioiden avulla niin, että jos $bRc \subset A$, niin $b \in A$ tai $c \in A$, kun b ja c ovat mitä tahansa renkaan R alkioita. Vaihdannaisella renkaalla tämä palautuu aiempaan määritelmään, sillä jos $bc \in A$, niin $brc = bcr \in A$ kaikilla $r \in R$.

6.3. Jakorenkaat ja lokalisointi. Jakorengas on rengas, johon on lisätty käänteisalkioita, jotta jakolasku tulisi mahdolliseksi. Menetelmä tuli osin tutuksi jo erotusmonoidiesimerkin 1.5 yhteydessä. Tällä kertaa tarkastellaan yleisempää tapausta, jossa käänteisalkiot lisätään vain valituille alkioille.

Olkoon R vaihdannainen rengas ja S jokin kertolaskun suhteen suljettu osajoukko, joka sisältää ykkösalkion. Tarkoitus on lisätä renkaaseen R kaikkien S:n alkioiden käänteisalkiot. Tarkastellaan karteesisen tulon $R \times S$ (joka ei yleensä itse ole rengas) kaksipaikkaista relaatiota

$$(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \iff c(a_1b_2 - a_2b_1) = 0 \quad \text{jollain } c \in S.$$

Tämä on sama ekvivalenssirelaatio kuin erotusmonoidiesimerkissä, nyt vain kirjoitettu eri muotoon renkaan laskusääntöjen avulla. Tekijärakennetta $(R \times S)/\sim$ nimitetään renkaan *jakorenkaaksi joukon S suhteen* ja merkitään $S^{-1}R$. Jakorenkaan alkiota $[(a, b)]_\sim$ voidaan merkitä murtolukumuodossa a/b. Jakorenkaaseen liittyy kanoninen kuvaus $\eta\colon R \to S^{-1}R$, missä $a \mapsto a/1$.

LAUSE 6.14. *Seuraavat väitteet pätevät renkaan R jakorenkaalle $S^{-1}R$:*

(a) *$S^{-1}R$ on vaihdannainen rengas, laskutoimituksina $a/b \cdot c/d = (ac)/(bc)$ ja $a/b + c/d = (ad + bc)/(bd)$.*
(b) *Kanoninen kuvaus η on rengashomomorfismi.*
(c) *Jos $s \in S$, kuva-alkiolla $\eta(s) \in S^{-1}R$ on käänteisalkio.*
(d) *Kanoninen kuvaus η on injektio, jos ja vain jos S ei sisällä nollanjakajia.*
(e) *$S^{-1}R$ on nollarengas, jos ja vain jos $0 \in S$.*

TODISTUS. Harjoitustehtävä. □

Edellisestä lauseesta seuraa erityisesti, että jos $S = R \setminus \{0\}$, jakorengas $S^{-1}R$ on kunta. Jos lisäksi R on kokonaisalue, kuntaa $S^{-1}R$ nimitetään R:n *osamääräkunnaksi*. Esimerkiksi $\mathbb{Q}$ on $\mathbb{Z}$:n osamääräkunta.

Tarkastellaan lopuksi jakorenkaisiin liittyvää prosessia, jota nimitetään renkaan *lokalisoinniksi*.

MÄÄRITELMÄ 6.15. Rengasta, jolla on vain yksi maksimaalinen ideaali, kutsutaan *lokaaliksi* tai *paikalliseksi* renkaaksi.

Alkuideaalin avulla voidaan tuottaa paikallinen jakorengas.

LAUSE 6.16 (Lokalisointi). *Olkoon R rengas ja P sen jokin alkuideaali. Tällöin $S = R \setminus P$ on kertolaskun suhteen suljettu joukko, joka sisältää ykkösalkion, ja jakorengas $R_P = S^{-1}R$ on paikallinen rengas.*

TODISTUS. Koska $P \neq R$, nähdään että $1 \in S$. Olkoot $a, b \in S$. Jos tulo ab ei olisi joukossa S, se kuuluisi alkuideaaliin P. Alkuideaalin määritelmän mukaan joko $a \in P$ tai $b \in P$, mikä on mahdotonta. Täten S on kertolaskun suhteen suljettu.

Osoitetaan sitten, että joukko $M = \{a/b \mid a \in P, b \in S\}$ on ideaali renkaassa R_P. Koska $0 \in P$, nähdään että $M \neq \emptyset$. Olkoot sitten $a/b, c/d \in M$ ja $r/s \in R_P$. Tällöin $ac - bd \in P$, koska P on ideaali, ja $bd \in S$, koska S on kertolaskun suhteen suljettu. Näin ollen

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ac - bd}{bd} \in M.$$

Samoin $ra \in P$ ja $sb \in S$, joten

$$\frac{r}{s} \cdot \frac{a}{b} = \frac{ra}{sb} \in M.$$

Ideaalikriteerin perusteella M on ideaali.

Näytetään lopuksi, että M on renkaan R_P ainoa maksimaalinen ideaali. Jos $A \not\subset M$ jollain ideaalilla A, niin löytyy alkio $a/b \in A \setminus M$. Tällöin $a \notin P$, joten $a \in S$, mistä seuraa, että a/b on kääntyvä alkio renkaassa R_P. Koska ideaali A sisältää kääntyvän alkion, se sisältää automaattisesti myös ykkösalkion, ja on siksi koko rengas. Tästä seuraa, että jokainen aito ideaali sisältyy ideaaliin M, joten M on ainoa maksimaalinen ideaali. □

Esimerkki 6.17. Termin "lokalisointi" voi ymmärtää seuraavan esimerkin valossa. Tarkastellaan polynomirengasta $R = \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ ja tulkitaan polynomit tavalliseen tapaan funktioiksi $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Jos p on jokin piste avaruudessa $\mathbb{R}^n$, voidaan määritellä ideaali

$$I(p) = \{f \in R \mid f(p) = 0\}.$$

Tämä ideaali on alkuideaali, sillä jos $(fg)(p) = 0$, niin joko $f(p) = 0$ tai $g(p) = 0$. Lokalisoimalla voidaan muodostaa paikallinen rengas $R_p = R_{I(p)}$.

Olkoon g polynomi, jolle pätee $g \notin I(p)$. Nyt $g(p) \neq 0$, ja koska g on funktiona jatkuva, on olemassa pisteen p ympäristö, jossa g ei saa arvoa nolla. Tästä seuraa, että renkaan R_p alkiot ovat rationaalifunktioita f/g, missä f ja g ovat polynomeja ja funktion arvo $f(x)/g(x)$ on määritelty, kun x sijaitsee jossain pisteen p ympäristössä. Voidaan ajatella, että lokalisoinnilla on näin muodostettu joukko paikallisesti määriteltyjä rationaalifunktioita.

Jos rengas ei ole vaihdannainen, tässä esitetyt käänteisalkioiden lisäämismenetelmät eivät sovellu sellaisinaan käytettäviksi. Itse asiassa ei ole edes selvää, että epävaihdannaisen renkaan alkioille ylipäätään voidaan lisätä käänteisalkioita. Jakorengas-nimitystä käytetään kuitenkin myös epävaihdannaisessa tapauksessa sellaisesta renkaasta, jossa jakolasku on mahdollinen. Tällaista rakennetta voidaan toisaalta ajatella epävaihdannaisena kuntana, ja silloin sitä nimitetään *vinokunnaksi*.