

5. Ryhmän kompositiotekijät

Jos ryhmästä löydetään normaali aliryhmä, sen suhteen voidaan muodostaa tekijäryhmä, jolla saattaa olla yksinkertaisempi rakenne kuin alkuperäisellä ryhmällä. Ryhmä voidaan ikään kuin pilkkoa kahteen “tekijään”, joiden ominaisuuksien selvittämisestä on apua koko ryhmän tutkimisessa. Pilkkomista voidaan myös jatkaa edelleen sekä normaalin aliryhmän että tekijäryhmän osalta, niin kauan kuin uusia normaaleja aliryhmiä löytyy. Mikäli ryhmä on äärellinen, lopulta päädytään kuitenkin pienimpiin mahdollisiin osiin, joita ei enää voi pilkkoa. Näitä nimitetään ryhmän kompositiotekijöiksi.

5.1. Normaalit jonot ja ratkeavat ryhmät. Ratkeavan ryhmän käsite kuuluu historiallisesti ensimmäisiin varsinaisen ryhmäteorian käsitteisiin. Évariste Galois todisti vuonna 1831, että polynomiyhtälöön liittyy aina tietty symmetriaryhmä, joka permutoi polynomien juuria, ja mahdollinen ratkaisukaava saadaan tietynlaisesta jonosta tuon symmetriaryhmän aliryhmiä. Juuri tästä syystä ryhmää, jonka aliryhmiä voidaan muodostaa mainitunlainen jono, kutsutaan ratkeavaksi.

MÄÄRITELMÄ 5.1. Ryhmän G normaali jono on jono aliryhmiä G_i , joille pätee

$$G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright \cdots \triangleright G_n = 1.$$

Tekijäryhmiä G_{i+1}/G_i kutsutaan jonon *tekijöiksi*. Jonon *pituus* on jonon aitojen inklusioiden lukumäärä, joka on sama kuin epätriviaalien tekijöiden määrä.

Huom. Tässä ja muissakin yhteyksissä tyydytään yleensä merkitsemään trivialeita ryhmää symbolilla 1, jättämällä siis joukkosulkeet pois. Samaten normaalin jonon tekijöitä merkitään yleensä vain isomorfiatyyppin mukaan; ei siis tehdä eroa esimerkiksi ryhmien A_3 ja \mathbb{Z}_3 välillä.

Ryhmällä voi olla useita erilaisia normaaleja jonoja, joissa voi myös olla eri tekijät. Esimerkiksi ryhmällä S_4 on muun muassa normaalit jonot $S_4 \triangleright A_4 \triangleright 1$ ja $S_4 \triangleright V_4 \triangleright 1$. Edellisen tekijät ovat (isomorfiava vaille) C_2 ja A_4 , jälkimmäisen S_3 ja V_4 .

Kaikkien normaalin jonon jäsenten ei tarvitse olla normaaleja ryhmässä G . Normaalius ei nimittäin ole transititiivinen ominaisuus: esimerkiksi

$$D_8 \triangleright \langle \rho^2, \sigma \rangle \triangleright \langle \sigma \rangle \triangleright 1$$

on normaali jono, mutta $\langle \sigma \rangle$ ei ole normaali ryhmässä D_8 . Samasta syystä normaalin jonon osajono ei myöskään välttämättä ole normaali.

ESIMERKKI 5.2. Normaalin jonon tekijän käsite on tiettyssä mielessä tulon tekijän yleistys. Jos nimittäin G on aliryhmiensä H ja K suora tulo eli $G \cong H \times K$, niin G :llä on normaali jono $G \triangleright H \triangleright 1$. Lisäksi $G/H \cong K$ ensimmäisen isomorfialauseen nojalla, joten normaalin jonon tekijät ovat samat kuin tulon tekijät H ja K . Sama pätee yleisemminkin: jos $G = HN$, missä $H \cap N = 1$ ja $N \trianglelefteq G$, niin jonon $G \triangleright N \triangleright 1$ tekijät ovat H ja N .

Jonon tekijät eivät kuitenkaan aina vastaa mitään tuloa. Esimerkiksi neljän alkion syklistä ryhmällä $C_4 = \langle g \rangle$ on normaali jono $C_4 \triangleright \langle g^2 \rangle \triangleright 1$, jonka molemmat

tekijät ovat isomorfisia ryhmän C_2 kanssa. Ryhmä C_4 kuitenkin sisältää vain yhden C_2 :n kanssa isomorfisen aliryhmän, joten se ei voi olla kahden tällaisen tekijän tulo.

Ratkeavalla ryhmällä täytyy olla tiettyntyyppinen normaali jono.

MÄÄRITELMÄ 5.3. Ryhmää sanotaan *ratkeavaksi*, jos sillä on normaali jono, jonka kaikki tekijät ovat vaihdannaisia ryhmiä.

Kaikki vaihdannaiset ryhmät ovat ratkeavia, koska triviaalin jonon $G \triangleright 1$ ainoa tekijä on vaihdannainen. Myös kaikki diedriryhmät ja kaikki äärelliset p -ryhmät ovat ratkeavia. Symmetriset ryhmät S_3 ja S_4 ovat ratkeavia, sillä niillä on normaalit jonot $S_3 \triangleright A_3 \triangleright 1$ ja $S_4 \triangleright A_4 \triangleright V_4 \triangleright 1$, joiden tekijät ovat vaihdannaisia. Sen sijaan S_n ja A_n eivät ole ratkeavia, mikäli $n \geq 5$. Tähän palataan myöhemmin.

5.2. Kompositiojonot. Normaalin jonon jäsenten väliin voidaan usein lisätä sopivia alkioita niin, että saadaan uusi normaali jono. Jos uusia alkioita ei voida lisätä, kysymyksessä on kompositiojono.

MÄÄRITELMÄ 5.4. Normaalia jonoa (H_i) sanotaan jonon (G_i) *hienonnukseksi*, mikäli se sisältää kaikki jonon (G_i) jäsenet, eli (G_i) on jonon (H_i) osajono.

MÄÄRITELMÄ 5.5. Jos ryhmän normaalilla jonolla ei ole triviaaleja tekijöitä, mutta kaikilla sen hienonnuksilla on, jonoa kutsutaan ryhmän *kompositiojonoksi*.

Kompositiojono on siis pituudeltaan maksimaalinen normaali jono, joka ei sisällä triviaaleja tekijöitä. Aiemmin mainittu jono $S_4 \triangleright A_4 \triangleright V_4 \triangleright 1$ ei ole kompositiojono, sillä ryhmällä V_4 on epätriviaali normaali aliryhmä C_2 , joten jonon loppupäätä voidaan hienontaa seuraavasti: $\cdots \triangleright V_4 \triangleright C_2 \triangleright 1$. Toisaalta jono $S_3 \triangleright A_3 \triangleright 1$ on kompositiojono, sillä sitä ei voida hienontaa ottamatta mukaan triviaaleja tekijöitä.

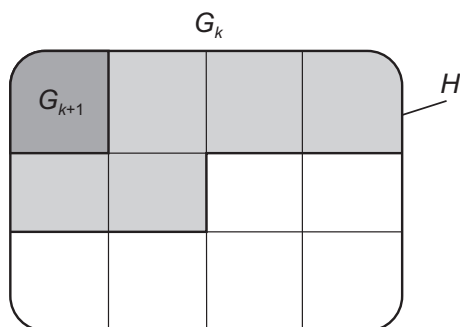
Normaalin jonon tekijöitä voidaan verrata kokonaisluvun tekijöihin. Oletetaan, että $n = m_1 \cdot m_2$. Jos jompikumpi tekijöistä ei ole alkuluku, se voidaan edelleen jakaa pienempiin tekijöihin. Lopulta saavutetaan kyseisen luvun alkutekijähajotelma $n = p_1 p_2 \cdots p_r$, jonka tekijöitä ei voi enää jakaa epätriviaalilla tavalla. Kompositiojono vastaa tällaista alkutekijähajotelmaa. Osoittautuu nimittäin, että ryhmän kompositiotekijät ovat järjestystä vaille yksikäsitteiset. On kuitenkin huomattava, että toisin kuin kokonaislukujen tapauksessa, jossa alkutekijät määräävät luvun täysin, kahdella ryhmällä voi olla samat kompositiotekijät, vaikka ryhmät eivät olisi keskenään isomorfiset.

Osoitetaan seuraavaksi, että alkutekijähajotelman alkulukuja vastaavat normaalin jonon *yksinkertaiset* tekijät. Ryhmää kutsutaan yksinkertaiseksi, jos se on epätriviaali eikä sillä ole aitoja epätriviaaleja normaaleja aliryhmiä.

LAUSE 5.6. *Ryhmän G normaali jono (G_i) on kompositiojono, jos ja vain jos sen tekijät ovat yksinkertaisia.*

TODISTUS. Oletetaan ensin, että normaali jono (G_i) ei ole kompositiojono eli että $G_k \triangleright H \triangleright G_{k+1}$ jollain k . Noetherin toisesta isomorfialauseesta seuraa tällöin, että $H/G_{k+1} \triangleleft G_k/G_{k+1}$, ja koska H/G_{k+1} ei ole triviaali, tekijä G_k/G_{k+1} ei ole yksinkertainen.

Oletetaan sitten, että jokin tekijä G_k/G_{k+1} ei ole yksinkertainen eli että pätee $H \triangleleft G_k/G_{k+1}$ jollain $H \neq \{1\}$. Olkoon $\pi: G_k \rightarrow G_k/G_{k+1}$ kanoninen surjektio. Tarkastellaan alkukuvaa $H' = \pi^{-1}H$ (ks. kuva 10). Tämä on normaali ryhmässä G_k , koska H on normaali maalijoukossa. Toisaalta ryhmä G_{k+1} on normaali H' :ssa, koska se on normaali suuremmassa ryhmässä G_k . Siispä $G_k \supseteq H' \supseteq G_{k+1}$. Lisäksi, koska π on surjektio, pätee $\pi H' = H$. Tällöin nähdään helposti, että $H' \neq G_k$, koska $H \neq G_k/G_{k+1}$, ja $H' \neq G_{k+1}$, koska $H \neq \{1\}$. Näin ollen jono (G_i) ei ole kompositiojono. \square



KUVA 10. Tekijän normaalista aliryhmästä saadaan uusi aliryhmä jonon jäsenten G_k ja G_{k+1} väliin.

Aiemmin hienonnettu jono

$$S_4 \triangleright A_4 \triangleright V_4 \triangleright C_2 \triangleright 1$$

on kompositiojono, sillä sen tekijät ovat C_2 , C_3 , C_2 ja C_2 , jotka ovat kaikki yksinkertaisia.

Edellisen lauseen todistuksessa tarkasteltiin tekijäryhmän normaalin aliryhmän alkukuvaa kanonisessa surjektiossa. Tällaista informaation siirtoa tekijäryhmästä alkuperäiseen ryhmään kutsutaan *nostamiseksi*. Idea on siinä, että kokonaisten sivuluokkien sijaan tarkastellaankin alkioita, joita ne koostuvat. Esimerkiksi

$$\mathbb{Z}_{30} \triangleright \langle \bar{6} \rangle \triangleright \{0\}$$

on normaali jono, jonka ensimmäinen tekijä on $\mathbb{Z}_{30}/\langle \bar{6} \rangle = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{5}\} = C_6$. Merkitään tätä tekijää kirjaimella G . Tekijästä puolestaan löytyy kolmen alkion normaali aliryhmä $H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$. Nostettuna kanonisen surjektion avulla alkuperäiseen ryhmään normaalista aliryhmästä tulee joukko

$$H' = \pi^{-1}H = \{ \bar{0}, \bar{6}, \bar{12}, \bar{18}, \bar{24}, \\ \bar{2}, \bar{8}, \bar{14}, \bar{20}, \bar{26}, \\ \bar{4}, \bar{10}, \bar{16}, \bar{22}, \bar{28} \} = \langle \bar{2} \rangle.$$

Alkuperäistä jonoa voidaan siis hienontaa jonoksi

$$\mathbb{Z}_{30} \triangleright \langle \bar{2} \rangle \triangleright \langle \bar{6} \rangle \triangleright \{0\},$$

jonka uudet tekijät C_2 ja C_3 vastaavat alkuperäisen tekijän G tekijäryhmää G/H sekä normaalia aliryhmää H .

Epätriviaalilla äärellisellä ryhmällä on aina kompositiojono. Tämä löydetään lähtemällä hienontamaan normaalia jonoa $G \triangleright 1$. Jokaisesta uudesta syntyvästä tekijästä H etsitään aito epätriviaali normaali aliryhmä K . Tämä aliryhmä nostetaan kanonisen surjektion avulla alkuperäisen jonon jäseneksi, ja uusiksi tekijöiksi saadaan K ja siihen liittyvä tekijäryhmä H/K . Hienonnusta jatketaan niin kauan kuin tekijöistä löytyy normaaleja aliryhmiä. Lopulta tekijät ovat kaikki yksinkertaisia, jolloin saatu jono on kompositiojono. Koska ryhmä on äärellinen, prosessi päättyy varmasti.

Jos vaihdannaisella ryhmällä on kompositiojono, sen tekijät ovat yksinkertaisia vaihdannaisia ryhmiä. Osoittautuu, että tällaiset ryhmät ovat äärellisiä syklisiä ryhmiä C_p , joiden kertaluku on alkuluku. Koska alkuperäisen ryhmän kertaluku on tekijöiden kertalukujen tulo, tästä kaikesta seuraa, että *äärettömällä vaihdannaisella ryhmällä ei voi olla kompositiojonoa*. Toisaalta jokaisella äärellisellä ratkeavalla ryhmällä on jokin kompositiojono, jonka tekijät ovat muotoa C_p , sillä vaihdannaisia tekijöitä pilkkomalla on päädyttävä lopulta yksinkertaisiin vaihdannaisiin ryhmiin.

Epävaihdannaisella äärettömällä ryhmällä voi olla tai olla olematta kompositiojono. Esimerkiksi reaaliset 2×2 -matriisit, joiden determinantti on 1, muodostavat ryhmän $SL_2(\mathbb{R})$, ja tällä on kompositiojono $SL_2(\mathbb{R}) \triangleright \{I, -I\} \triangleright \{I\}$. Jonon ensimmäinen tekijä on *projektiivisten* kuvausten ryhmä $PSL_2(\mathbb{R})$, joka on yksinkertainen (todistus sivuutetaan; katso esim. D. Robinson: A Course in the Theory of Groups).

Toisaalta ryhmällä $G \times \mathbb{Z}$, missä G on mikä tahansa epävaihdannainen ryhmä, ei ole kompositiojonoa. Jos nimittäin olisi, voitaisiin tarkastella sen viimeistä epätriviaalia termiä G_{n-1} . Nyt projektioryhmä $H = \{(1, k) \mid (g, k) \in G_{n-1}\}$ on normaali ryhmässä G_{n-1} . Koska G_{n-1} on viimeinen epätriviaali termi, niin $H = G_{n-1}$. Toisaalta $H \cong m\mathbb{Z}$ jollain $m \in \mathbb{Z}$, joten H ei ole yksinkertainen. Tämä on ristiriita.

5.3. Kompositiotekijöiden yksikäsitteisyys. Ranskalainen matemaatikko Camille Jordan todisti vuonna 1868, että äärellisen ryhmän kompositiotekijöiden kertaluvut ovat yksikäsitteiset, ja saksalainen Otto Hölder täydensi tulosta vuonna 1889 näyttämällä, että itse tekijät ovat isomorfaa vaille samat. Tulos pätee myös sellaisille äärettömille ryhmille, joilla on kompositiojono. Ryhdytään seuraavaksi osoittamaan tätä tulosta.

MÄÄRITELMÄ 5.7. Ryhmän kaksi normaalia jonoa ovat *ekvivalentit*, jos niiden kompositiotekijöiden välillä on bijektio φ , jolle pätee $\varphi(A) \cong A$.

Sen osoittamiseksi, että tietyn ryhmän kaikki kompositiojonot ovat keskenään ekvivalentteja, näytetään, että kahdella normaalilla jonolla on aina ekvivalentit hienonnukset. Koska kompositiojonoilla ei ole epätriviaaleja hienonnuksia, niiden on itse oltava toistensa kanssa ekvivalentteja. Ensinnäkin on kuitenkin todistettava seuraava tekninen aputulos.

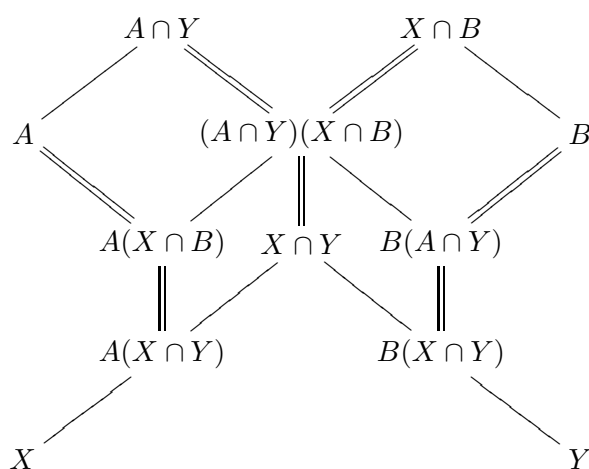
LEMMA 5.8 (Zassenhausin perhoslemma). *Olkoot A, B, X ja Y ryhmän G aliryhmiä. Oletetaan, että $A \trianglelefteq X$ ja $B \trianglelefteq Y$. Tällöin*

$$A(X \cap B) \trianglelefteq A(X \cap Y) \quad \text{ja} \quad B(A \cap Y) \trianglelefteq B(X \cap Y),$$

ja lisäksi tekijäryhmille pätee

$$\frac{A(X \cap Y)}{A(X \cap B)} \cong \frac{B(X \cap Y)}{B(A \cap Y)}.$$

Oheisessa Hassen kaaviossa näkyvät lemmaan liittyvien ryhmien keskinäiset sisältyvyysuhteet (ryhmät suurenevat ylhäältä alaspäin). Kaksoisviiva merkitsee normaalia aliryhmää, ja yhdensuuntaiset kaksoisviivat viittaavat isomorfisiin tekijäryhmiin. Ylemmät suunnikkaat (etusiiivet) perustuvat suoraan ensimmäiseen isomorfialauseeseen. Alemmat suunnikkaat (takasiivet) puolestaan vastaavat lemmän sisältöä.



KUVA 11. Zassenhausin perhonen

TODISTUS. Huomattakoon aivan aluksi, että koska A ja B ovat normaaleja aliryhmiä ryhmissä X ja Y , kaikki lemmassa mainitut tulot (kuten $A(X \cap Y)$) ovat lemmän 4.1 perusteella ryhmiä.

Merkitään $D = (A \cap Y)(X \cap B)$ ja osoitetaan, että

$$\frac{A(X \cap Y)}{A(X \cap B)} \cong \frac{X \cap Y}{D}.$$

Ensin todetaan, että koska $A \trianglelefteq X$, niin $A \cap Y \trianglelefteq X \cap Y$. Samoin $X \cap B \trianglelefteq X \cap Y$. Tästä seuraa helposti, että myös tulo $D = (A \cap Y)(X \cap B)$ on normaali ryhmässä $X \cap Y$.

Määritellään $f: A(X \cap Y) \rightarrow (X \cap Y)/D$ kaavalla $f(az) = zD$, missä $a \in A$ ja $z \in X \cap Y$. Tämä f on selvästi surjektiivinen. Homomorfisuuden osoittamiseksi otetaan alkio $a_1, a_2 \in A$ ja $z_1, z_2 \in (X \cap Y)$. Koska $A \trianglelefteq X$ ja $z_1 \in X$, nähdään että $z_1 a_2 = a' z_1$ jollain $a' \in A$. Nyt

$$f(a_1 z_1 \cdot a_2 z_2) = f(a_1 a' \cdot z_1 z_2) = (z_1 z_2)D = z_1 D \cdot z_2 D = f(a_1 z_1) f(a_2 z_2),$$

joten f on homomorfismi.

Osoitetaan vielä, että kuvauksen f ydin on $A(X \cap B)$, jolloin haluttu tulos seuraa homomorfialauseesta. Jos $a \in A$ ja $z \in X \cap B$, niin erityisesti $z \in D$, joten

$f(az) = D$ eli $az \in \text{Ker } f$. Toisaalta, jos $f(az) = D$ eli $z \in D$, niin $z = yx$ joillain $y \in A \cap Y$ ja $x \in X \cap B$. Tällöin $ay \in A$, joten $az = ayx \in A(X \cap B)$. Näin ollen $\text{Ker } f = A(X \cap B)$.

Samalla tavoin voidaan osoittaa, että $B(X \cap Y)/B(A \cap Y) \cong (X \cap Y)/D$, ja lemmän väite seuraa isomorfian transitiivisuudesta. \square

LAUSE 5.9 (Schreierin hienonnukselause). *Ryhmän G millä tahansa kahdella normaalilla jonolla on ekvivalentit hienonnuksat.*

TODISTUS. Oletetaan, että G :llä on normaalit jonot

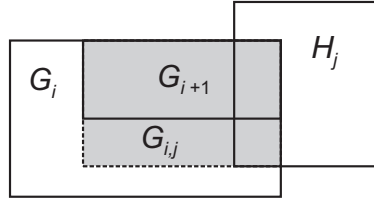
$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \cdots \supseteq G_n = 1$$

ja

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \cdots \supseteq H_m = 1.$$

Edetään lisäämällä ensimmäisessä jonossa aina kahden jonon peräkkäisen jäsenen väliin "kopio" koko toisesta jonosta. Tarkemmin sanottuna, määritellään aliryhmät $G_{i,j} = G_{i+1}(G_i \cap H_j)$ kaikilla $i \leq n$ ja $j \leq m$. Nyt

$$G_{i,j+1} = G_{i+1}(G_i \cap H_{j+1}) \leq G_{i+1}(G_i \cap H_j) = G_{i,j}.$$



KUVA 12. Hienonnuksen alkio

Asettamalla $A = G_{i+1}$, $X = G_i$, $B = H_{j+1}$ ja $Y = H_j$, saadaan Zassenhausin lemmasta, että $G_{i,j+1} \trianglelefteq G_{i,j}$. Lisäksi

$$G_{i,0} = G_{i+1}(G_i \cap G) = G_i \quad \text{ja} \quad G_{i,m} = G_{i+1}(G_i \cap \{1\}) = G_{i+1},$$

joten jono

$$G_{0,0} \supseteq G_{0,1} \supseteq \cdots \supseteq G_{0,m-1} \supseteq G_{1,0} \supseteq \cdots \supseteq G_{n-1,0} \supseteq \cdots \supseteq G_{n-1,m-1} \supseteq 1$$

on jonon (G_i) hienonnuks. Samalla tavoin voidaan määritellä $H_{i,j} = H_{j+1}(H_j \cap G_i)$, jolloin saadaan jonon (H_j) hienonnuks

$$H_{0,0} \supseteq H_{1,0} \supseteq \cdots \supseteq H_{n-1,0} \supseteq H_{0,1} \supseteq \cdots \supseteq H_{0,m-1} \supseteq \cdots \supseteq H_{n-1,m-1} \supseteq 1.$$

Molemmat hienonnuksat sisältävät nm tekijää. Tekijöiden välille voidaan määritellä bijektio $G_{i,j}/G_{i,j+1} \mapsto H_{i,j}/H_{i+1,j}$, ja Zassenhausin lemmän nojalla nähdään, että toisiaan vastaavat tekijät ovat isomorfiset. \square

KOROLLAARI 5.10 (Jordanin–Hölderin lause). *Saman ryhmän kaksi kompositiojonoa ovat aina keskenään ekvivalentit.*

TODISTUS. Edellisen lauseen mukaan väitteen kompositiojonoilla on ekvivalentit hienonnuksat. Kompositiojonon määritelmän perusteella näiden hienonnuksien uudet tekijät ovat kaikki triviaaleja, ja samoin kaikki hienonnuksien triviaalit tekijät ovat uusia (koska kompositiojonossa triviaaleja tekijöitä ei esiinny). Tästä seuraa, että alkuperäiset jonot olivat jo keskenään ekvivalentit. \square

Esimerkiksi syklisellä ryhmällä \mathbb{Z}_{30} on muun muassa kompositiojonot

$$\mathbb{Z}_{30} \triangleright \langle \overline{3} \rangle \triangleright \langle \overline{15} \rangle \triangleright 1 \quad \text{ja} \quad \mathbb{Z}_{30} \triangleright \langle \overline{5} \rangle \triangleright \langle \overline{10} \rangle \triangleright 1.$$

Ensimmäisen jonon kompositiotekijät ovat järjestyksessä C_3 , C_5 ja C_2 , ja toisen jonon tekijät ovat C_5 , C_2 ja C_3 . Molemmissa on siis samat tekijät.

Jordanin-Hölderin lauseen avulla saadaan uusi karakterisointi äärellisen ryhmän ratkeavuudelle. Ratkeavalla ryhmällä on normaali jono, jonka tekijät ovat vaihdannaisia. Aiemmin todettiin, että jos ryhmä on äärellinen, sen vaihdannaisia tekijöitä pilkkomalla saatava kompositiojono sisältää vain syklisiä tekijöitä, joiden kertaluku on alkuluku. Toisaalta Jordanin-Hölderin lauseen perusteella millä tahansa tavalla tuotettu kompositiojono sisältää samat tekijät.

LAUSE 5.11. *Äärellinen ryhmä on ratkeava, jos ja vain jos sillä on normaali jono, jonka tekijät ovat syklisiä ryhmiä, joiden kertaluku on alkuluku.*

5.4. Äärelliset yksinkertaiset ryhmät. Koska jokaisella äärellisellä ryhmällä on kompositiojono, äärellisten ryhmien teoriaa voidaan lähestyä kompositiotekijöiden kautta. Tämä lähestymistapa johtaa kahteen erilliseen kysymykseen: minkälaisia ovat äärelliset yksinkertaiset ryhmät, ja millä tavalla kompositiotekijöistä voidaan saada selville koko ryhmän rakennetta koskevia asioita. Jälkimmäistä kysymystä tutkii niin sanottu *ryhmälaajennosten* teoria. Tarkastellaan erästä tähän liittyvää esimerkkiä.

ESIMERKKI 5.12. Ryhmillä S_3 ja \mathbb{Z}_6 on kompositiojonot

$$S_3 \triangleright A_3 \triangleright 1 \quad \text{ja} \quad \mathbb{Z}_6 \triangleright \langle \overline{2} \rangle \triangleright 1.$$

Molempien jonojen tekijät ovat (järjestyksessä) C_2 ja C_3 . Pelkästään kompositiotekijöistä ei voida siis päätellä, mikä ryhmä on kyseessä. Tässä suhteessa ryhmän kompositiojono poikkeaa kokonaisluvun alkutekijähajotelmasta.

Tekijöiden perusteella voidaan kuitenkin päätellä ryhmästä jotakin. Oletetaan, että ryhmällä G on kompositiojono $G \triangleright H \triangleright 1$, jonka tekijät ovat C_2 ja C_3 . Tämä tarkoittaa erityisesti sitä, että $H = C_3$ ja $C_3 \triangleleft G$. Koska $\text{sy}(2, 3) = 1$, aliryhmä C_3 ei voi sisältää alkioita, jonka kertaluku on 2. Tällainen alkio kuitenkin löytyy G :stä (esimerkiksi Cauchyn lauseen perusteella), joten $C_2 \leq G$ ja $C_2 \cap C_3 = 1$. Nyt on kaksi mahdollisuutta: voi olla $C_2 \triangleleft G$, jolloin $G \cong C_2 \times C_3 \cong \mathbb{Z}_6$ (lause 4.2), tai sitten $C_2 \not\triangleleft G$.

Vaikka C_2 ei olisi normaali ryhmässä G , niin joka tapauksessa pätee $G = C_2 C_3$, koska C_3 on normaali (lemma 4.1). Tämä rakenne on niin sanottu *puolisuora tulo*. Puolisuorassa tulossa jokainen alkio voidaan esittää yksikäsitteisessä muodossa ab , missä $a \in C_2$ ja $b \in C_3$. Lisäksi tässä muodossa kirjoitettujen alkioiden tulo saadaan kaavasta

$$(a_1 b_1)(a_2 b_2) = (a_1 a_2) \left(a_2^{-1} b_1 b_2 \right).$$

Koko puolisuoran tulon rakenne riippuu siis tekijöiden rakenteen lisäksi siitä, millä tavalla ensimmäisen ryhmän alkeilla konjugointi toimii toisessa. Triviaali konjugointi johtaa takaisin suoraan tuloon.

Esimerkin tapauksessa ei ole vaikea osoittaa, että mahdollisia epätriviaaleja konjugointeja on vain yksi: jos $1 \neq a \in C_2$ ja $b \in C_3$, niin $ab = b^{-1}$. Ratkaisemalla tästä ryhmän kertotaulu nähdään, että kyseessä on itse asiassa S_3 ; esimerkiksi

$(^{12})(123) = (132)$. Näin on löydetty kaikki mahdolliset ryhmät, joiden kompositiotekijät ovat C_2 ja C_3 .

Jos kompositiotekijöiden kertaluvut eivät ole keskenään jaottomia, on myös sellainen vaihtoehto, että ryhmä ei ole lainkaan tekijöidensä tulo. Tämä tilanne nähtiin jo aiemmin esimerkissä 5.2. Tällaisissa tapauksissa ryhmän rakenteen selvittäminen voi johtaa hankaliin laajennosteoreettisiin kysymyksiin.

Äärellisten yksinkertaisten ryhmien tunteminen on ensiaskel kaikkien äärellisten ryhmien rakenteen selvittämisessä. Tämän askeleen ottamisen aloitti jo Galois todistamalla seuraavan tuloksen.

LAUSE 5.13. *Alternoivat ryhmät A_n ovat yksinkertaisia, kun $n \geq 5$ tai $n = 3$.*

TODISTUS. (Hahmotelma.) Tapaus A_3 on selvä, joten oletetaan, että $n \geq 5$. Tällöin 3-sykliden konjugaattiluokka ei jakaudu ryhmässä A_n , joten kaikki 3-syklit ovat keskenään konjugaatteja. Lisäksi, jos $H \trianglelefteq A_n$, niin H sisältää kaikkien alkioidensa konjugaatit. Jos siis H sisältää jonkin 3-syklin, sen täytyy sisältää kaikki 3-syklit. Toisaalta ei ole vaikea nähdä, että 3-syklit virittävät ryhmän A_n , kun $n \geq 3$. Lauseen tulos saadaan nyt käymällä läpi erilaiset mahdolliset syklityypit ja osoittamalla, että jos H sisältää tietyn syklityypin permutaatioita, se sisältää myös jonkin 3-syklin. \square

KOROLLAARI 5.14. *Alternoiva ryhmä A_n on ratkeava, jos ja vain jos $n < 5$.*

TODISTUS. Olemme nähneet, että pienet alternoivat ryhmät ovat ratkeavia. Toisaalta, jos $n \geq 5$, ryhmän A_5 kompositiojonossa on vain yksi tekijä, ja se ei ole vaihdannainen. \square

Galois'n jälkeen yksinkertaisia ryhmiä löydettiin lisää, ja erinäisten vaiheiden jälkeen 1980-luvulla alettiin uskoa, että kaikki äärelliset yksinkertaiset ryhmät olisi löydetty. Tuloksen todistamiseksi koottiin yhteen satoja artikkeleja, joita jouduttiin korjailemaan ja paikkailemaan, mutta nykyisin näyttää siltä, että todistuksessa ei pitäisi olla aukkoja. Kukaan yksittäinen ihminen ei ole sitä kuitenkaan pystynyt tarkistamaan. Gorenstein, Lyons ja Solomon ovat aloittaneet projektin, jossa he kokoavat todistusta yksiin kansiin, ja kyseisestä projektista on muodostumassa yksitoistaosainen kirjasarja.

LAUSE 5.15 (Äärellisten yksinkertaisten ryhmien luokittelulause). *Jokainen äärellinen yksinkertainen ryhmä kuuluu johonkin seuraavista luokista.*

1. *sykliset ryhmät C_p , missä p on alkuluku (ainoat vaihdannaiset ryhmät)*
2. *alternoivat ryhmät A_n , missä $n \geq 5$*
- 3.a. *klassiset Lie-tyyppin ryhmät*
- 3.b. *poikkeukselliset Lie-tyyppin ryhmät*
4. *26 sporadista ryhmää (ainoa äärellinen luokka)*

Klassiset Lie-tyyppin ryhmät ovat äärellisten vektoriavaruuksien erityyppisten lineaarikuvausten muodostamia ryhmiä, siis matriisiryhmiä, tai oikeammin näiden ryhmien yksinkertaisia kompositiotekijöitä. Esimerkiksi ortogonaaliset ja unitaariset ryhmät kuuluvat mainittuihin lineaarikuvausryhmiin. Poikkeukselliset Lie-tyyppin ryhmät ovat samantapaisella konstruktiolla saatavia matriisiryhmiä, mutta

niitä esiintyy vain muutamaa tiettyä dimensiota olevissa vektoriavaruuksissa. Sporadiset ryhmät ovat ryhmiä, jotka eivät kuulu mihinkään muista luokista. Niistä suurinta nimitetään “hirviöryhmäksi”, ja sen kertaluku on kertaluokkaa $8 \cdot 10^{53}$.