Ryhmäteoriaa

2. Ryhmän toiminta

Permutaatiot kuvaavat jonkin perusjoukon alkioita toisikseen. Eräät permutaatiot jättävät joitain alkioita paikalleen, toiset liikuttavat kaikkia joukon alkioita. Kaikki perusjoukon permutaatiot muodostavat ryhmän, jossa neutraalialkiona on kaikki alkiot paikallaan pitävä identtinen permutaatio.

Ryhmän toiminta jossain joukossa yleistää permutaation käsitettä. Kaikille ryhmän alkioille voidaan määritellä tapa, jolla niiden oletetaan vaikuttavan joukon alkioihin. Tämän tavan tulee olla sopusoinnussa ryhmän rakenteen kanssa; esimerkiksi neutraalialkion tulisi pitää kaikki joukon alkiot paikallaan.

Toimintojen avulla saadaan tietoa ryhmän rakenteesta ainakin kahdella tavalla. Ensinnäkin ryhmän toiminnan kautta voidaan saada ryhmälle esitys esimerkiksi vektoriavaruuden lineaarikuvauksina, jolloin ryhmää päästään tutkimaan helposti käsiteltävien matriisien avulla. Toisaalta ryhmä voi toimia eri tavoin myös itsessään, ja näiden toimintojen tutkiminen auttaa monien ryhmän rakenteeseen liittyvien kysymysten ratkaisemisessa.

2.1. Toiminnan määritelmä. Oletetaan seuraavassa, että G on ryhmä ja X jokin joukko. Merkitään symbolilla X^X kaikkien kuvausten $X \to X$ joukkoa.

Määritelmä 2.1. Kuvausta $\varphi\colon G \to X^X$, $g \mapsto f_g$, nimitetään ryhmän G *vasemmanpuoleiseksi toiminnaksi joukossa* X, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

(T1) $f_e = \mathrm{id}_X$, missä e on neutraalialkio
(T2) $f_{gh} = f_g \circ f_h$ kaikilla $g, h \in G$.

Vastaavasti voidaan määritellä *oikeanpuoleinen toiminta* korvaamalla jälkimmäinen ehto ehdolla (T2') $f_{gh} = f_h \circ f_g$.

Yllä oleva määritelmä soveltuu sellaisenaan myös monoidin toiminnan määrittelyyn. Ryhmän tapauksessa käänteisalkioiden olemassaolosta kuitenkin seuraa, että

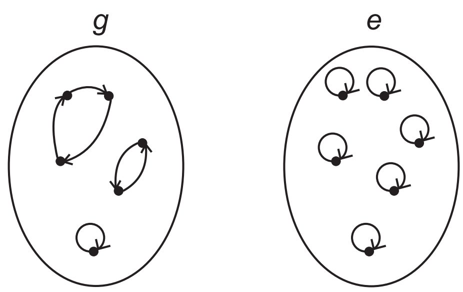
$$f_g \circ f_{g^{-1}} = f_{g \cdot g^{-1}} = f_e = \mathrm{id},$$

joten jokainen f_g on kääntyvä (käänteisalkio on $f_{g^{-1}}$). Jokainen ryhmän alkio vastaa tällöin jotain bijektiota $X \to X$ eli joukon X permutaatiota. Kuvauksen φ maalijoukko voidaan siis rajoittaa permutaatioryhmään $\mathrm{Sym}(X)$, ja samalla φ:stä tulee ryhmähomomorfismi $G \to \mathrm{Sym}(X)$. Ryhmän toimintaa kutsutaankin tämän vuoksi usein ryhmän *permutaatioesitykseksi.*

Yleensä on tapana merkitä vasemmanpuoleista toimintaa yksinkertaisemmin kertolaskun tapaan: $f_g(x) = gx$. (Joskus saatetaan käyttää selvyyden vuoksi merkintää '$g.x$'.) Tällöin vasemmanpuoleisen toiminnan ehdoiksi tulee

(T1) $ex = x$ kaikilla $x \in X$
(T2) $(gh)x = g(hx)$ kaikilla $g, h \in G$ ja $x \in X$.

Oikeanpuoleinen toiminta kirjoitetaan vastaavasti oikeanpuoleiseksi kertolaskuksi $f_g(x) = xg$. Tällöin $x(gh) = (xg)h$.



Kuva 3. Ryhmän alkiot vastaavat permutaatioita

Esimerkkejä toiminnoista:

- Joukon X permutaatioryhmä toimii joukossa X luonnollisella tavalla: $\sigma x = \sigma(x)$ kaikilla permutaatioilla σ.
- Vektoriavaruuden kerroinkunnan kertolaskuryhmä $(K^*, \cdot)$ toimii vektoriavaruudessa skalaarikertolaskulla.
- Kääntyvien $n \times n$-reaalimatriisien ryhmällä $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ on matriisikertolaskun määrittelemä toiminta avaruudessa $\mathbb{R}^n$.
- Jos G on ryhmä, kaava $f_g\colon h \mapsto gh$ määrittelee G:n vasemmanpuoleisen toiminnan itsessään. Vastaavasti kaava $h \mapsto hg$ määrittelee oikeanpuoleisen toiminnan. Näitä toimintoja kutsutaan vasemmaksi ja oikeaksi *siirroksi* eli *translaatioksi*. Siirtotoiminta voidaan laajentaa myös G:n osajoukkojen kokoelmaan $\mathcal{P}(G)$ kaavalla $gA = \{ga \mid a \in A\}$.
- Jos $H \leq G$, kaava $xH \mapsto (gx)H$ määrittelee G toiminnan H:n sivuluokkien joukossa. Tämä on erikoistapaus siirrosta.
- Jos G on ryhmä, myös kaava $f_g\colon h \mapsto ghg^{-1}$ määrittelee toiminnan joukossa G. Tätä toimintaa kutsutaan *konjugoinniksi*. Konjugoinnilla on muun muassa se huomattava ominaisuus, että jokainen bijektio f_g on ryhmähomomorfismi.
- Jos $x \mapsto gx$ on jonkin ryhmän vasemmanpuoleinen toiminta, niin kaava $xg = g^{-1}x$ määrittelee erään oikeanpuoleisen toiminnan. Tämä seuraa yhtälöketjusta

$$x(gh) = (gh)^{-1}x = (h^{-1}g^{-1})x = h^{-1}(g^{-1}x) = (xg)h.$$

Samalla tavoin jokaista oikeanpuoleista toimintaa kohti voidaan määritellä vastaava vasemmanpuoleinen toiminta. Ryhmän vasemman- ja oikeanpuoleiset toiminnat voidaan tällä tavoin tarvittaessa korvata toisillaan.

Joukkoa, jossa on määritelty ryhmän G toiminta, voidaan kutsua *G-joukoksi.* Kahden G-joukon välinen kuvaus $f\colon X \to Y$ on *G-morfismi*, jos

$$g.f(x) = f(g.x) \quad \text{kaikilla } g \in G \text{ ja } x \in X.$$

Esimerkiksi K-kertoimisten vektoriavaruuksien väliset lineaariset kuvaukset ovat K^*-morfismeja.

2.2. Radat ja vakauttajat. Oletetaan, että on määritelty ryhmän G toiminta joukossa X. Osajoukkoa Y kutsutaan *vakaaksi*, jos $gy \in Y$ kaikilla $g \in G$ ja $y \in Y$. Jos osajoukko on vakaa, voidaan siinä määritellä G:n toiminta yksinkertaisesti rajoittamalla alkuperäistä toimintaa, koska yksikään alkio ei kuvaudu tässä toiminnassa joukon ulkopuolelle. Minimaalisia vakaita osajoukkoja kutsutaan radoiksi.

MÄÄRITELMÄ 2.2. Alkion $x \in X$ *rata* on joukko

$$Gx = \{gx \mid g \in G\}.$$

Jos samassa joukossa toimivia ryhmiä on useita, rataa voi kutsua täsmällisemmin *G-radaksi.*

Radat muodostavat joukon X osituksen; vastaava ekvivalenssirelaatio on

$$x \sim x' \iff x = gx' \quad \text{jollain } g \in G.$$

Jokainen ratojen yhdiste on vakaa osajoukko. Ratojen joukkoa merkitään X/G (tai joskus $G\backslash X$, jos halutaan tehdä ero vasemman- ja oikeanpuoleisten toimintojen välillä).

Mikä tahansa osajoukko saadaan vakaaksi, kun rajoitutaan tarkastelemaan sopivaa aliryhmää.

MÄÄRITELMÄ 2.3. Osajoukon $Y \subset X$ *vakauttaja* on

$$G_Y = \{g \in G \mid gy \in Y \text{ kaikilla } y \in Y\}.$$

Jos $Y = \{y\}$, merkitään myös $G_Y = G_y$ ja puhutaan alkion y *kiinnittäjästä.*

Alkioiden kiinnittäjät ovat aina G:n aliryhmiä, mutteivät välttämättä normaaleja.[7] Kiinnittäjä voi vakauttaa suurempiakin osajoukkoja: esimerkiksi ryhmän siirtotoiminta itsessään ($g.h = gh$) on sellainen, että jokaisen neutraalialkiosta poikkeavan alkion h kiinnittäjä on $G_h = \{e\}$, joka tietysti kiinnittää kaikki ryhmän alkiot. (Tämä seuraa ryhmän sievennyssäännöstä.)

Esimerkkejä:

- Olkoon V vektoriavaruus, jonka kerroinkunta on K. Punkteerattu avaruus $V \setminus \{\overline{0}\}$ on vakaa skalaarikertolaskussa (eli ryhmän K^* toiminnassa). Toisaalta jokaisen nollasta poikkeavan vektorin rata on origon kautta kulkeva suora, jolta on poistettu origo itse. Ositusta

  $$P(V) = (V \setminus \{\overline{0}\})/K^*$$

  kutsutaan vektoriavaruuden V *projektiiviseksi avaruudeksi.*

[7] Yleisen osajoukon vakauttaja on alimonoidi, muttei välttämättä aliryhmä, ellei osajoukko tai vakauttaja itse ole äärellinen.

- Ryhmän $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ toiminnassa aliavaruuden $\langle v\rangle \subset \mathbb{R}^n$ (origon kautta kulkeva suora) vakauttaja on niiden matriisien joukko, joilla on ominaisvektorina v. Toisaalta esim. origokeskisen ympyrän vakauttaja on ns. *ortogonaalinen ryhmä* $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Tähän aliryhmään kuuluvat ne matriisit, joiden sarakkeet muodostavat ortonormaalin vektorijoukon. Ne säilyttävät vektorien välisen pistetulon ja sitä myötä vektorien pituudet.
- Ajatellaan ryhmän $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ toimintaa tasossa. Origokeskisen tasasivuisen kolmion vakauttaja on kolmion *symmetriaryhmä*. Voidaan osoittaa, että tämä on isomorfinen kolmen alkion permutaatioryhmän S_3 kanssa. Tällä tavoin saadaan ryhmän S_3 esitys tason lineaarikuvauksina eli niin sanottu *lineaariesitys*.
- Merkitään $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Määritellään permutaatioryhmän S_n toiminta pareilla $\{a, b\}$, missä $a \neq b$, seuraavasti: $\sigma\{a, b\} = \{\sigma a, \sigma b\}$. Jos parien joukko E tulkitaan jonkin verkon särmiksi, niin E:n vakauttaja on kyseisen verkon *automorfismiryhmä* eli permutaatioryhmä joka säilyttää verkon rakenteen.

Kiinnittäjän G_x alkiot pitävät x:n paikallaan, ja lisäksi jokainen kiinnittäjän sivuluokka vastaa jotain alkiota x:n radalla. Tämä todistetaan seuraavassa.

LAUSE 2.4 (Rata–vakauttajalause). *Olkoon X jokin G-joukko ja $x \in X$. Tällöin on olemassa bijektio $f\colon G/G_x \to Gx$, jolle pätee $gG_x \mapsto gx$.*

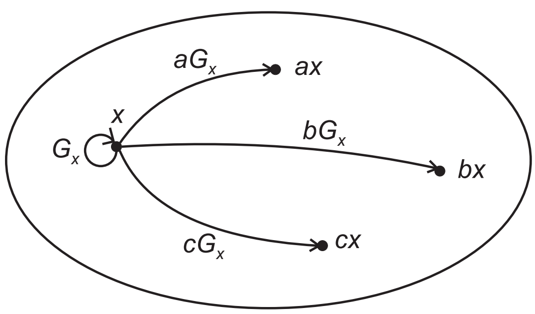
TODISTUS. Osoitetaan ensin, että mainittu f on hyvin määritelty. Jos g ja g' ovat samassa sivuluokassa, niin $g = g'h$ jollain $h \in G_x$. Alkio h kiinnittää x:n, joten $gx = g'(hx) = g'x$. Siispä voidaan määritellä kuvaus $f\colon gG_x \mapsto gx$. Selvästikin f on surjektio radalle Gx.

Osoitetaan vielä, että f on injektio. Jos $gx = hx$ joillain $g, h \in G$, niin

$$h^{-1}gx = h^{-1}hx = ex = x,$$

eli alkio $h^{-1}g$ kiinnittää x:n. Näin ollen $h^{-1}g \in G_x$, mistä seuraa, että g ja h kuuluvat samaan kiinnittäjän sivuluokkaan. □

HUOMAUTUS 2.5. Jos määritellään G:n siirtotoiminta $g.(hG_x) = (gh)G_x$ kiinnittäjän G_x sivuluokkien joukossa, voidaan osoittaa, että edellisen lauseen bijektio f on itse asiassa G-joukkojen G/G_x ja Gx välinen *isomorfismi* eli bijektiivinen G-morfismi.



KUVA 4. Kiinnittäjän sivuluokat vastaavat yksi yhteen radan alkioita

MÄÄRITELMÄ 2.6. Ryhmän G toimintaa joukossa X sanotaan *transitiiviseksi*, jos kaikilla $x, y \in X$ löytyy jokin $g \in G$, jolle $gx = y$. Tällöin sanotaan myös, että G-joukko X on *homogeeninen*.

Jokainen rata on homogeeninen joukko. Toisaalta ryhmä toimii transitiivisesti, jos ja vain jos joukko X on jokaisen alkionsa rata. Transitiivisen toiminnan tapauksessa rata–vakauttajalauseesta saadaan hyödyllinen seuraus.

LAUSE 2.7. *Oletetaan, että ryhmä G toimii transitiivisesti joukossa X. Olkoon H jonkin alkion kiinnittäjä. Tällöin*[8]

$$|X| = [G : H].$$

TODISTUS. Merkitään H:n kiinnittämää alkiota kirjaimella x. Rata–vakauttajalauseesta 2.4 saadaan bijektio $Gx \to G/H$. Koska toiminta on transitiivista, pätee $Gx = X$, josta väite seuraa. □

KOROLLAARI 2.8. *Oletetaan, että G toimii joukossa X (ei välttämättä transitiivisesti). Olkoon T kaikkien G-ratojen* edustajisto*, eli joukko, joka sisältää jokaisesta radasta täsmälleen yhden alkion. Tällöin pätee*

$$|X| = \sum_{x \in T} [G : G_x].$$

TODISTUS. Jokainen rata Gx on homogeeninen joukko, joten edellisen lauseen mukaan $|Gx| = [G : G_x]$. Tulos seuraa siitä, että radat muodostavat joukon X osituksen. □

ESIMERKKI 2.9. Permutaatioryhmät S_3 ja S_2 toimivat luonnollisesti joukoissa $\{1, 2, 3\}$ ja $\{1, 2\}$. Näiden toimintojen avulla voidaan tuloryhmälle $S_3 \times S_2$ määritellä toiminta joukossa $N_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ seuraavasti:

$$(\sigma_1, \sigma_2)n = \begin{cases} \sigma_1(n), & \text{jos } n \in \{1, 2, 3\} \\ \sigma_2(n-3) + 3, & \text{jos } n \in \{4, 5\}. \end{cases}$$

Ryhmän S_3 alkiot siis toimivat tavalliseen tapaan joukossa $\{1, 2, 3\}$, ja ryhmän S_2 ainoa 2-sykli (12) vaihtaa alkiot 4 ja 5 keskenään. Tämä toiminta ei ole transitiivista: alkion 1 rata on joukko $\{1, 2, 3\}$, ja alkion 4 rata on joukko $\{4, 5\}$.

Alkion 1 kiinnittäjä on aliryhmä

$$G_1 = \{(\mathrm{id}, \mathrm{id}),\ (\mathrm{id}, (12)),\ ((23), \mathrm{id}),\ ((23), (12))\},$$

joka on isomorfinen Kleinin neliryhmän kanssa. Sen kolme sivuluokkaa ovat G_1, $((12), \mathrm{id})G_1$ ja $((132), \mathrm{id})G_1$, jotka vastaavat radan alkioita 1, 2 ja 3.

Koska jokainen muotoa $(\sigma, (12))$ oleva pari liikuttaa alkiota 4, tämän alkion kiinnittäjä G_4 sisältyy aliryhmään $S_3 \times \{\mathrm{id}\}$. Toisaalta edellisen korollaarin mukaan

$$|N_5| = [G : G_1] + [G : G_4] = 12/4 + 12/|G_4| = 3 + 12/|G_4|,$$

joten kiinnittäjässä G_4 on kuusi alkiota. Siispä $G_4 = S_3 \times \{\mathrm{id}\}$.

[8] Aliryhmän indeksi on määritelty vain äärellisessä tapauksessa. Kuitenkin myös äärettömillä mahtavuuksilla pätee $|G| = |X||H|$, ja todistus toimii sellaisenaan.

2.3. Konjugointi. Ryhmässä G voidaan määritellä G:n konjugointitoiminta

$$f_g\colon h \mapsto ghg^{-1}.$$

Alkioiden kuvia konjugoinnissa merkitään $ghg^{-1} = {}^g h$.

On suoraviivaista tarkistaa, että jokainen kuvaus f_g on homomorfismi. Tästä seuraa muun muassa, että aliryhmät kuvautuvat konjugoitaessa aliryhmiksi. Näin ollen konjugointitoiminta voidaan määritellä myös ryhmän aliryhmien joukossa. Alkion tai aliryhmän kuvia konjugointitoiminnassa nimitetään vastaavasti alkion tai aliryhmän *konjugaateiksi.* Konjugaatit ovat siis joko muotoa ${}^g h = ghg^{-1}$ (alkioiden konjugointi) tai ${}^g H = gHg^{-1}$ (aliryhmien konjugointi).

Ryhmän G konjugointitoiminnan ratoja kutsutaan *konjugaattiluokiksi* ja alkioiden kiinnittäjiä *keskittäjiksi.* Alkion x konjugaattiluokkaa merkitään ${}^G x$. Kaksi alkiota kuuluvat samaan konjugaattiluokkaan, jos ne ovat toistensa konjugaatteja. Neutraalialkio muodostaa aina oman konjugaattiluokkansa. Seuraava tulos kertoo konjugaattiluokkien tärkeydestä; todistus jätetään harjoitustehtäväksi.

Lause 2.10. *Jokainen normaali aliryhmä on konjugaattiluokkien yhdiste.*

Alkion x keskittäjää ryhmässä G merkitään

$$C_G(x) = \{g \in G \mid gxg^{-1} = x\}.$$

Konjugointitoiminnan symmetrian vuoksi $g \in C_G(h)$ jos ja vain jos $h \in C_G(g)$. Koska toisaalta

$$gxg^{-1} = x \iff gx = xg,$$

alkion x keskittäjää voidaan luonnehtia myös niin, että se koostuu täsmälleen niistä alkioista g, jotka kommutoivat x:n kanssa. Keskittäjien leikkausta

$$Z(G) = \bigcap_{x \in G} C_G(x) = \{g \in G \mid gxg^{-1} \text{ kaikilla } x \in G\}$$

nimitetään *keskukseksi.* Keskuksen alkiot kommutoivat kaikkien ryhmän alkioiden kanssa, niillä konjugoiminen pitää kaikki alkiot paikallaan, eivätkä ne itse liiku mihinkään muilla alkioilla konjugoitaessa. Tästä seuraa muun muassa, että $Z(G)$ on ryhmän G normaali aliryhmä.

Jos G toimii konjugoimalla omien aliryhmiensä joukossa, ratoja kutsutaan aliryhmien konjugaattiluokiksi – aivan kuten alkioiden tapauksessa. Aliryhmien kiinnittäjiä nimitetään sen sijaan *normalisoijiksi* ja merkitään

$$N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\} = \{g \in G \mid gH = Hg\}.$$

Nimitys selviää tarkasteltaessa määritelmää: Jos g on normalisoijan alkio, niin g:hen liittyvät vasen ja oikea H:n sivuluokka yhtyvät. Tästä saadaan normalisoijalle luonnehdinta, jonka mukaan aliryhmän H normalisoija on *suurin aliryhmä, jossa H on normaali.* Esimerkiksi $N_G(H) = G$ täsmälleen silloin, kun $H \trianglelefteq G$.

Edellä todistetuista lauseista 2.7 ja 2.8 saadaan nyt seuraavat versiot.

Lause 2.11. *Ryhmässä G alkion x konjugaattiluokan koko on*

$$\left|{}^G x\right| = [G : C_G(x)]$$

ja aliryhmän H konjugaattiluokan koko puolestaan

$$\left|{}^G H\right| = [G : N_G(H)].$$

LAUSE 2.12 (Luokkayhtälö). *Olkoon C jokin ryhmän G konjugaattiluokkien edustajisto. Tällöin pätee*

$$|G| = \sum_{x \in C} [G : C_G(x)],$$

mikä voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$|G| = |Z(G)| \ + \sum_{\substack{x \in C \\ x \notin Z(G)}} [G : C_G(x)].$$

LUOKKAYHTÄLÖN TODISTUS. Ensimmäinen yhtälö on vain seurauslauseen 2.8 toinen muotoilu. Jälkimmäinen yhtälö seuraa siitä, että jokaisen keskuksen alkion konjugaattiluokka on yksiö. Kaikki keskuksen alkiot ovat siksi joukossa C, ja lisäksi

$$\sum_{x \in Z(G)} [G : C_G(x)] = \sum_{x \in Z(G)} |{}^G x| = |Z(G)|.$$

$\square$