13. Algebralliset laajennokset

Vanhoina aikoina algebran tutkimuksen päämääränä oli oppia ratkaisemaan polynomiyhtälöitä. Niinpä erityisen tärkeää osaa klassisessa kuntalaajennosten teoriassa näyttelevät sellaiset laajennokset, joiden kaikki alkiot ovat joidenkin lähtökunnan polynomien juuria. Esimerkiksi jokainen kompleksiluku on jonkin korkeintaan toisen asteen reaalikertoimisen polynomiyhtälön ratkaisu.

13.1. Algebrallisuus ja minimipolynomit.

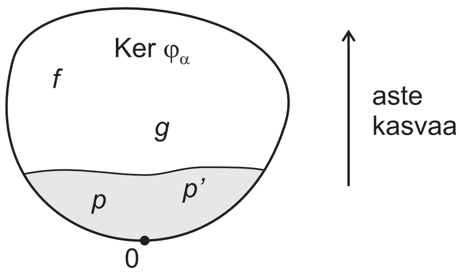
MÄÄRITELMÄ 13.1. Olkoon L kunnan K laajennos. Alkiota $\alpha \in L$ kutsutaan *algebralliseksi* kunnan K suhteen, jos on olemassa nollasta poikkeava polynomi $f \in K[X]$, jolle pätee $f(\alpha) = 0$. Jos tällaista polynomia ei ole, sanotaan, että α on *transkendenttinen* K:n suhteen. Jos kaikki L:n alkiot ovat algebrallisia K:n suhteen, sanotaan, että L on algebrallinen K:n suhteen, ja laajennosta L/K kutsutaan *algebralliseksi laajennokseksi*.

Oletetaan, että L on kunnan K laajennos ja $\alpha \in L$. Jos α on transkendenttinen K:n suhteen, niin kaikilla nollasta poikkeavilla polynomeilla $f \in K[X]$ pätee $f(\alpha) \neq 0$. Tämä tarkoittaa, että alkioon α liittyvän sijoitushomomorfismin ydin

$$\operatorname{Ker} \varphi_\alpha = \{f \in K[X] \mid f(\alpha) = 0\}$$

on nollaideaali.

Vastaavasti α on algebrallinen, jos ja vain jos sijoitushomomorfismin ydin on epätriviaali. Koska $K[X]$ on pääideaalirengas, ideaali $\operatorname{Ker} \varphi_\alpha$ on jonkin yhden polynomin p virittämä, eli $\operatorname{Ker} \varphi_\alpha = \langle p \rangle$. Koska jokainen ideaalin $\langle p \rangle$ polynomi on jaollinen p:llä, nähdään että p:n aste on minimaalinen joukon $\operatorname{Ker} \varphi_\alpha$ nollasta poikkeavien polynomien keskuudessa. Lisäksi myös kaikki p:n kanssa samanasteiset joukon $\operatorname{Ker} \varphi_\alpha$ polynomit ovat jaollisia p:llä, joten ne voivat erota tästä vain vakiokertoimella, ja jokainen niistä virittää siksi saman ideaalin. Polynomin p määräämiseksi yksikäsitteisesti riittää siis viritysominaisuuden lisäksi vaatia esimerkiksi, että korkeimman asteen kerroin on 1 eli että p on *pääpolynomi*. Tätä polynomia nimitetään alkion α *minimipolynomiksi*.



KUVA 23. Sijoitushomomorfismin ytimen virittää mikä tahansa minimaalisen asteen omaava nollasta poikkeava polynomi. Nämä ovat kaikki toistensa liittoalkioita.

MÄÄRITELMÄ 13.2. Oletetaan, että $\alpha \in L$ on algebrallinen kunnan K suhteen. Alkion α *minimipolynomi* K:n suhteen on sellainen nollasta poikkeava pääpolynomi $p \in K[X]$, jolle pätee $p(\alpha) = 0$ ja jonka aste on pienin mahdollinen. Alkion α minimipolynomia kunnan K suhteen merkitään $p = \min(K, \alpha)$.

Huom. Koska määritelmän mukaan $p(\alpha) = 0$, niin $p \in \operatorname{Ker} \varphi_\alpha$. Määritelmää edeltävän päättelyn perusteella alkion α minimipolynomi voidaan karakterisoida niin, että se on *se pääpolynomi, joka virittää alkioon α liittyvän sijoitushomomorfismin ytimen.*

Esimerkki 13.3. Luku $\sqrt{2}$ on algebrallinen kunnan $\mathbb{Q}$ suhteen, sillä se on polynomin $X^2 - 2$ juuri. Koska $\sqrt{2}$ ei ole rationaaliluku, se ei ole minkään ensimmäisen asteen polynomin juuri. Näin ollen $\min(\mathbb{Q}, \sqrt{2}) = X^2 - 2$. Toisaalta $\min(\mathbb{R}, \sqrt{2}) = X - \sqrt{2}$.

Alkion α minimipolynomin hyödyllisyys piilee siinä, että sen aste kertoo laajennoksen $K(\alpha)$ asteen. Seuraavassa lauseessa tämä seikka on koottu yhteen muiden hyödyllisten ominaisuuksien kanssa.

Lause 13.4. *Olkoon L kunnan K laajennos, ja olkoon $\alpha \in L$ algebrallinen kunnan K suhteen. Tällöin*

i) *Minimipolynomi* $\min(K, \alpha)$ *on jaoton renkaassa $K[X]$.*
ii) *Jos $f \in K[X]$, niin $f(\alpha) = 0$, jos ja vain jos* $\min(K, \alpha)$ *jakaa f:n.*
iii) *$K[\alpha]$ on kunta, ja $K[\alpha] = K(\alpha)$.*
iv) *Jos n on polynomin* $\min(K, \alpha)$ *aste, niin alkiot $1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}$ muodostavat laajennoksen $K(\alpha)/K$ kannan. Erityisesti $[K(\alpha) : K] = n < \infty$.*

Todistus. Merkitään $\min(K, \alpha) = p$. Aloitetaan kohdasta (ii). Jos $f(\alpha) = 0$ jollain $f \in K[X]$, niin $f \in \operatorname{Ker} \varphi_\alpha$. Koska p virittää ideaalin $\operatorname{Ker} \varphi_\alpha$, polynomi f on jaollinen p:llä. Toisaalta, jos $f = pg$ jollain $g \in K[X]$, niin $f(\alpha) = p(\alpha)g(\alpha) = 0$.

i) Oletetaan, että $p = fg$ joillain $f, g \in K[X]$, jolloin

$$f(\alpha)g(\alpha) = p(\alpha) = 0.$$

Lauseen 12.5 perusteella $f(\alpha)$ ja $g(\alpha)$ ovat renkaassa $K[\alpha]$. Tämä rengas on kokonaisalue, koska se on kunnan L alirengas, joten $f(\alpha) = 0$ tai $g(\alpha) = 0$. Kohdasta (ii) seuraa, että f tai g on jaollinen p:llä. Toisaalta f ja g jakavat molemmat p:n, joten jompikumpi niistä on p:n liittoalkio ja toinen siis yksikkö. Täten p on jaoton.

iii) Lauseen 12.5 mukaan $K[\alpha] = \operatorname{Im} \varphi_\alpha$, ja toisaalta $\langle p \rangle = \operatorname{Ker} \varphi_\alpha$. Algebrojen homomorfialauseesta seuraa nyt, että $K[X]/\langle p \rangle \cong K[\alpha]$. Koska $K[\alpha] \subset L$ on kokonaisalue, $\langle p \rangle$ on alkuideaali. Toisaalta $K[X]$ on pääideaalirengas, joten sen jokainen nollasta poikkeava alkuideaali on maksimaalinen (ks. esimerkki 6.9). Tästä seuraa, että $K[\alpha]$ on itse asiassa kunta. Lisäksi $K[\alpha] = K(\alpha)$, koska $K[\alpha] \subset K(\alpha)$ ja $K(\alpha)$ on pienin kunta, joka sisältää sekä K:n että alkion α.

iv) Olkoon $x \in K(\alpha)$. Kohdan (iii) nojalla $x = f(\alpha)$ jollain $f \in K[X]$. Jakoyhtälöstä nähdään, että $f = qp + r$, missä $\deg(r) < \deg(p) = n$. Nyt $f(\alpha) = r(\alpha)$, koska $p(\alpha) = 0$. Alkio $x = r(\alpha)$ voidaan siis kirjoittaa lineaarikombinaationa alkioista $1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}$. Oletetaan sitten, että $\sum_{i=0}^{n-1} a_i \alpha^i = 0$ joillain $a_i \in K$. Tällöin polynomille $g = \sum_{i=0}^{n-1} a_i X_i$ pätee $g(\alpha) = 0$, joten kohdan (ii) perusteella p jakaa g:n. Kuitenkin g:n aste on pienempi kuin n, joten g:n on oltava nollapolynomi. Tämä tarkoittaa sitä, että $a_i = 0$ kaikilla i ja joukko $\{1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}\}$ on vapaa. Kyseinen joukko muodostaa siis laajennoksen $K(\alpha)$ kannan kerroinkunnan K suhteen. $\square$

Esimerkki 13.5. Tarkastellaan laajennosta $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$. Polynomille $f = X^3 - 2$ pätee $f(\sqrt[3]{2}) = 0$, joten luvun $\sqrt[3]{2}$ minimipolynomi jakaa f:n. Toisaalta f on jaoton Eisensteinin kriteerin perusteella, joten se on luvun $\sqrt[3]{2}$ minimipolynomi. Täten laajennoksen $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ aste on 3. Lisäksi $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, joten jokainen laajennoksen alkio on muotoa $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$. Tämä koskee myös käänteislukuja x^{-1}, missä $x \in \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$.

Esimerkki 13.6. Kompleksiluku $\omega = e^{2\pi i/3} = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ on polynomin $X^3 - 1$ juuri. Tämä polynomi ei kuitenkaan ole ω:n minimipolynomi, sillä se jakautuu tekijöihin seuraavasti: $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$. Näistä tekijöistä jälkimmäinen on jaoton rationaalijuuritestin perusteella, ja sillä on juurenaan ω. Siispä alkion ω minimipolynomi on $X^2 + X + 1$, ja $[\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}] = 2$.

Ei ole vaikea nähdä, että äärellinen laajennos on aina äärellisviritteinen. Aiemmin todettiin, että sama ei päde toisinpäin: äärellisviritteinen laajennos ei ole välttämättä aina äärellinen. Käsitteet ovat kuitenkin yhtäpitäviä, mikäli laajennos on algebrallinen. Lisäksi äärellinen laajennos on aina algebrallinen. Nämä ajatukset on ilmaistu seuraavissa kahdessa lauseessa.

Lause 13.7. *Olkoon L kunnan K äärellinen laajennos. Tällöin L on äärellisviritteinen ja algebrallinen K:n suhteen.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lause 13.8. *Olkoon L kunnan K laajennos. Oletetaan, että $\alpha_i \in L$ on algebrallinen K:n suhteen kaikilla i. Tällöin $K[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ on kunnan K äärellinen laajennos, jonka asteelle pätee*

$$[K[\alpha_1, \dots, \alpha_n] : K] \leq \prod_{i=1}^{n} [K(\alpha_i) : K].$$

Todistus. Käytetään induktiota luvun n suhteen. Tapaus $n = 1$ seuraa lauseesta 13.4. Oletetaan, että väite pätee renkaalle $K_1 = K[\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}]$. (Huomaa, että $K[\alpha_1, \dots, \alpha_n] = K_1[\alpha_n]$.) Tällöin erityisesti K_1 on kunta. Koska α_n on algebrallinen kunnan K ja siis myös kunnan K_1 suhteen, lauseesta 13.4 seuraa, että $K_1[\alpha_n] = K_1(\alpha_n)$ on kunta. Edelleen saman lauseen mukaan $\min(K_1, \alpha_n)$ jakaa polynomin $\min(K, \alpha_n)$, joten

$$[K_1[\alpha_n] : K_1] \leq [K(\alpha_n) : K].$$

Induktio-oletuksen ja lauseen 12.3 perusteella

$$[K_1[\alpha_n] : K] = [K_1[\alpha_n] : K_1] \cdot [K_1 : K] \leq \prod_{i=1}^{n} [K(\alpha_i) : K].$$

Lisäksi oikeanpuoleinen tulo on äärellinen lauseen 13.4 nojalla. □

Edellisistä lauseista saadaan suoraan seuraava ehto alkion algebrallisuudelle.

Korollaari 13.9. *Olkoon L kunnan K laajennos. Tällöin $\alpha \in L$ on algebrallinen K:n suhteen, jos ja vain jos $[K(\alpha) : K]$ on äärellinen. Lisäksi L on algebrallinen, jos $[L : K]$ on äärellinen.*

Korollaarin jälkimmäisen väitteen implikaatiota ei voi kääntää. Esimerkiksi joukko $\{2^{1/n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ virittää $\mathbb{Q}$:n algebrallisen laajennoksen, jonka aste on ääretön.

Nyt voidaan todistaa, että laajennoksen algebrallisuus on transitiivinen ominaisuus.

LAUSE 13.10. *Olkoon $K \subset L \subset M$ jono kuntia. Jos L/K ja M/L ovat algebrallisia laajennoksia, niin M/K on algebrallinen.*

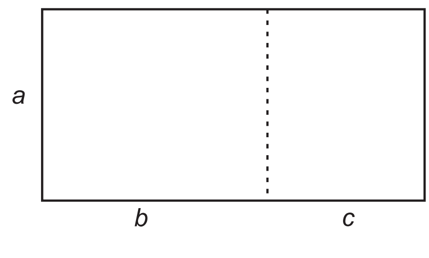
TODISTUS. Oletetaan, että $m \in M$. Olkoon $p = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ alkion m minimipolynomi kunnan L suhteen. Merkitään $K_1 = K(a_0, \ldots, a_n)$. Koska L on algebrallinen K:n suhteen ja $a_i \in L$ jokaisella i, laajennos K_1 on äärellinen lauseen 13.8 perusteella. Nyt $p \in K_1[X]$, joten m on algebrallinen kunnan K_1 suhteen. Täten $[K_1(m) : K_1]$ on äärellinen, ja

$$[K_1(m) : K] = [K_1(m) : K_1] \cdot [K_1 : K] < \infty.$$

Edelleen $K(m) \subset K_1(m)$, joten $[K(m) : K] < \infty$. Lauseesta 13.7 seuraa, että $K(m)$ on algebrallinen K:n suhteen. Erityisesti siis m on algebrallinen K:n suhteen, ja koska m oli mielivaltainen, koko laajennos M/K on algebrallinen. □

13.2. Sovellus: harppi–viivainkonstruktiot. Edellä opittua teoriaa voidaan käyttää tiettyjen klassisten geometristen konstruktioiden tutkimiseen. Nämä konstruktiot, joista ehkä tunnetuin kulkee nimellä ympyrän neliöinti, ovat askarruttaneet matemaatikkojen mieltä antiikista 1800-luvulle saakka, jolloin niiden toteuttaminen viimein osoitettiin mahdottomaksi algebrallisten menetelmien avulla.

Antiikin Kreikassa geometrialla oli erityisen tärkeä sija matemaattisessa kirjallisuudessa. Algebrallisten merkintöjen puuttuessa geometriaa käytettiin kaikkien matemaattisten (eli lähinnä geometristen ja lukuteoreettisten) tulosten esittämiseen. Lukuja edustivat eripituiset janat: yhteenlasku tulkittiin kahden janan liittämiseksi peräkkäin, ja kahden luvun tulo tarkoitti sellaisen suorakulmion muodostamista, jonka sivut vastasivat kerrottavia lukuja. Näin voitiin esittää esimerkiksi osittelulaki $a(b+c) = ab + ac$ jakamalla suorakulmio, jonka sivujen pituudet ovat a ja $b+c$, kahdeksi suorakulmioksi, jotka vastasivat tuloja ab ja ac.



KUVA 24. Osittelulakia esittävä geometrinen konstruktio

Perinteisen tarinan mukaan filosofi Platon[21] vaati, että geometriset konstruktiot olisi toteutettava vain harppia ja viivainta hyväksi käyttäen. Viivaimella sai

[21]Platon (428/427–348/347 eKr.), ateenalainen filosofi, Akatemian perustaja. Platon oli aikanaan huomattava vaikuttaja myös matematiikan alalla, vaikka hänen ei tiedetä itse tuottaneen omaperäisiä matemaattisia tuloksia.

piirtää rajattoman pitkän suoran kahden tunnetun pisteen kautta, ja harpilla oli sallittua piirtää ympyrä, jonka keskipiste ja säde tunnettiin. (Alun perin säännöt annettiin vielä tiukemmassa muodossa, mutta ne olivat yhtäpitävät tässä esitettyjen kanssa.) Pian nousi esiin kolme ongelmaa, joita kreikkalaiset eivät pystyneet ratkaisemaan edes lukemattomien yritysten jälkeen:

1. *Ympyrän neliöinti.* On tuotettava sellaisen neliön sivu, jonka pinta-ala on sama kuin annetulla ympyrällä.
2. *Kuution kahdentaminen.* On tuotettava sellaisen kuution sivu, jonka tilavuus on kaksi kertaa annetun kuution tilavuus.
3. *Kulman kolmiajako.* On tuotettava kulma, jonka suuruus on kolmasosa annetun kulman suuruudesta.

Kreikkalaisten epäonnistuminen yllä mainittujen tehtävien ratkaisemisessa ei ollut osoitus heidän kyvyttömyydestään. Vuonna 1837 Pierre Wantzel nimittäin osoitti, että 2. ja 3. konstruktio eivät olisi mahdollisia suorittaa pelkästään harpilla ja viivaimella. Myös 1. konstruktio on mahdoton, mutta tämän todistaminen onnistui vasta, kun Ferdinand von Lindemann osoitti vuonna 1882 luvun π transkendenttisuuden.

Selvitetään nyt, miten geometriset konstruktio-ongelmat voidaan formuloida algebran kielellä. Tarkasteltavina ovat tason pistejoukot $G \subset \mathbb{R}^2$, joita nimitetään *kuvioiksi. Kuvion G suora* on suora, joka kulkee G:n kahden pisteen kautta. *Kuvion G ympyrä* taas on ympyrä, jonka keskipiste on G:ssä ja säde kahden G:n pisteen välinen etäisyys.

Olkoon annettu kuvio $G_0 \subset \mathbb{R}^2$. *Geometrinen konstruktio joukosta* G_0 on äärellinen jono kuvioita

$$G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_n,$$

missä $G_{i+1} = G_i \cup \{P_{i+1}\}$ kaikilla $i < n$ ja P_{i+1} on jokin kuvion G_i suorien tai ympyröiden leikkauspiste. Sanotaan, että kuvio G *voidaan konstruoida kuviosta* G_0, jos on olemassa geometrinen konstruktio $G_0 \subset \cdots \subset G_n$, missä $G_n = G$. *Kuvion G kunta K_G* on laajennos $\mathbb{Q}(A)$, missä A sisältää kaikkien G:n pisteiden x- ja y-koordinaatit.

Seuraava lause antaa algebrallisen ehdon kuvion konstruoitavuudelle.

LAUSE 13.11. *Jos kuvio G voidaan konstruoida kuviosta G_0, niin*

$$[K_G : K_{G_0}] = 2^n$$

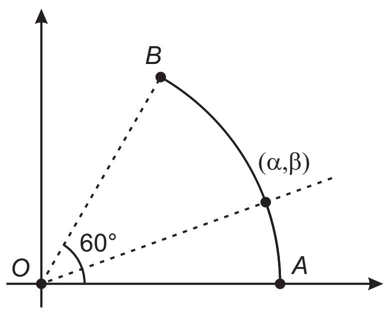
jollain $n \in \mathbb{N}$.

TODISTUS. Olkoon $G_0 \subset \cdots \subset G_n = G$ geometrinen konstruktio. Analyyttisen geometrian perusteista tiedetään, että jokaista kuvion G_i suoraa ja ympyrää kuvaa polynomiyhtälö, jonka kertoimet ovat kunnassa K_{G_i} ja joka on korkeintaan toista astetta. Edelleen tiedetään, että näiden suorien ja ympyröiden leikkauspisteiden löytämiseksi on ratkaistava korkeintaan toisen asteen yhtälöpari, jonka ratkaisut ovat muotoa $x = a_1 + b_1\sqrt{c}$ ja $y = a_2 + b_2\sqrt{c}$, missä $a_1, a_2, b_1, b_2, c \in K_{G_i}$. Täten $K_{G_{i+1}} \subset K_{G_i}(\sqrt{c})$. Koska luvun $\sqrt{c}$ minimipolynomi kunnan K_{G_i} suhteen on korkeintaan toista astetta, saadaan lopulta $[K_{G_{i+1}} : K_{G_i}] \leq 2$. Väite seuraa tästä induktiolla, kun käytetään lausetta 12.3. $\square$

Yllä oleva lause pätee myös käänteisessä muodossa: jos aste $[K_G : K_{G_0}]$ on kakkosen potenssi, niin kuvio G voidaan konstruoida kuviosta G_0. Tätä ei kuitenkaan tarvita silloin, kun konstruktioita osoitetaan mahdottomiksi, kuten seuraavassa esimerkissä tehdään.

ESIMERKKI 13.12. *Kulman kolmiajako.* Osoitetaan, että esimerkiksi $60°$ kulmaa ei voi jakaa kolmeen osaan harpilla ja viivaimella. Valitaan koordinaatisto niin, että annettu 60 asteen kulma tulee suorien OA ja OB väliin, missä $O = (0, 0)$, $A = (1, 0)$ ja $B = (1/2, \sqrt{3}/2)$. Olkoon $G_0 = \{O, A, B\}$, jolloin $K_{G_0} = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ ja $[K_{G_0} : \mathbb{Q}] = 2$.

Oletetaan, että kulma AOB voidaan jakaa kolmeen osaan. Tällöin syntyvän kulman kyljen ja origokeskisen yksikköympyrän leikkauspiste (joka siis myös voidaan konstruoida) on (α, β), missä $\alpha = \cos 20°$ ja $\beta = \sin 20°$. Oletuksen mukaan voidaan konstruoida kuvio G, joka sisältää pisteen (α, β).



KUVA 25. Kulman kolmiajako

Tutkitaan tarkemmin koordinaattia α. Kolminkertaisen kulman kosinin kaavasta nähdään, että

$$\cos(3 \cdot 20°) = 4\cos^3 20° - 3\cos 20° = 4\alpha^3 - 3\alpha.$$

Koska $\cos 60° = 1/2$, tästä seuraa, että α on polynomin $8X^3 - 6X - 1$ juuri. Koska tämä polynomi on jaoton $\mathbb{Q}$:n suhteen esimerkiksi rationaalijuuritestin perusteella, se on minimipolynomin $\min(\mathbb{Q}, \alpha)$ liittoalkio. Siispä kyseisen minimipolynomin aste on 3, ja edelleen $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 3$. Lauseiden 13.11 ja 12.3 perusteella

$$[K_G : \mathbb{Q}] = [K_G : K_{G_0}] \cdot [K_{G_0} : \mathbb{Q}] = 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$$

jollain $n \in \mathbb{N}$, mutta toisaalta

$$[K_G : \mathbb{Q}] = [K_G : \mathbb{Q}(\alpha)] \cdot [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = [K_G : \mathbb{Q}(\alpha)] \cdot 3.$$

Tämä on selvästi mahdotonta, joten kuviota G ei voida konstruoida.

Tämä esimerkki osoittaa, että mielivaltaisen kulman kolmiajakamiseksi harpilla ja viivaimella ei voi olla olemassa yleistä menetelmää. Joitakin kulmia silti voidaan jakaa kolmeen osaan: esimerkiksi 30 asteen kulma voidaan konstruoida, mikä tarkoittaa sitä, että suoran kulman kolmiajako onnistuu.

13.3. Transkendenttisuudesta. Luvun todistamiseksi algebralliseksi riittää löytää polynomi, jonka juuri kyseinen luku on. Transkendenttisuuden todistaminen on sen sijaan työläämpää. Jotkut tapaukset ovat kuitenkin selkeitä: Oletetaan esimerkiksi, että K on kunta, ja tarkastellaan polynomialgebran $K[X]$ jakokuntaa $K(X)$. Tämä kunta on K:n laajennos, ja alkio $X \in K(X)$ on selvästi transkendenttinen K:n suhteen. Kaikkien K-kertoimisten polynomien joukko $K[X]$ nimittäin sisältyy kuntaan $K(X)$, ja alkioon X liittyvä sijoitushomomorfismi $K[X] \to K(X)$ on inkluusiokuvaus. Toisin sanoen, sijoitettaessa alkio X polynomiin f tuloksena on f. Siispä $f(X) = 0$ jos ja vain jos $f = 0$.

Useimmiten transkendenttisista luvuista puhuttaessa tarkoitetaan reaali- tai kompleksilukuja, jotka ovat transkendenttisia rationaalilukujen kunnan suhteen. Nykyään on tunnettua, että transkendenttisia lukuja on olemassa, vieläpä runsain mitoin. On nimittäin varsin helppo osoittaa, että $\mathbb{Q}$-kertoimisia polynomeja on vain numeroituva määrä, jolloin myös niiden juuria on numeroituvan monta (ks. lemma 14.11). Siispä *algebrallisten lukujen joukko*

$$\mathbb{A} = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha \text{ on algebrallinen } \mathbb{Q}\text{:n suhteen}\}$$

on numeroituva. Toisaalta kompleksilukujen joukko on ylinumeroituva, joten valtaosa kompleksiluvuista (tai yhtä hyvin reaaliluvuista) on transkendenttisia.

Yllä esitetty päättely on mahdollista tehdä vain, jos kompleksilukujen joukon ylinumeroituvuus tunnetaan. Viimeksi mainitun seikan todisti Georg Cantor vuonna 1878. Kuitenkin jo aiemmin – tarkemmin sanottuna vuonna 1844 – Joseph Liouville oli osoittanut, että eräät hänen löytämänsä luvut ovat transkendenttisia reaalilukuja. Näitä lukuja kutsutaan nykyään Liouvillen luvuiksi. Liouvillen löytö oli ensimmäinen osoitus transkendenttisten lukujen olemassaolosta. Tunnetumpi esimerkki transkendenttisesta luvusta saatiin vuonna 1873, kun Charles Hermite osoitti Neperin luvun e transkendenttisuuden. Hieman myöhemmin, eli vuonna 1882, Ferdinand von Lindemann onnistui Hermiten menetelmää mukaillen osoittamaan, että myös luku π on transkendenttinen rationaalilukujen suhteen. Lindemannin ja Hermiten todistukset käyttävät analyyttisiä menetelmiä.

Avoimeksi ongelmaksi sen sijaan on jäänyt muun muassa se, onko e algebrallinen vai transkendenttinen laajennoksen $\mathbb{Q}(\pi)$ suhteen eli onko olemassa polynomia, jonka kertoimissa saa hyödyntää piin potensseja ja jolla on juurena e.