Matematiikan laitos
AlgebraII
Harjoitus 8
20.03.2011
Ratkaisuehdotuksia
Aleksandr Pasharin

1. Kompleksilukujen kunta $\mathbb{C}$ on reaalinen vektoriavaruus. Osoita, että
   (a) on olemassa yksikäsitteinen $\mathbb{R}$-lineaarinen kuvaus
   $$\varphi : \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C},$$
   joka vie alkioiden tensoritulot $z_1 \otimes z_2 \in \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ vastaaille tuloille $z_1 \otimes z_2 \in \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}$,
   (b) kuvaus φ on surjektiivinen mutta ei injektiivinen.

Ratkaisu: a) Määritelmän mukaan $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}$ on $\mathbb{C}$-moduli, mutta siitä saadaan $\mathbb{R}$-moduli luonnollisella tavalla rajoittamalla $\mathbb{C}$:n toiminta $\mathbb{R}$:ään (vrt. Harj 6 Teht. 6b).

Riittää osoittaa, että kuvaus $f : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}$, $f(z_1, z_2) = z_1 \otimes_{\mathbb{C}} z_2$ on $\mathbb{R}$-bilineaarinen. Tarkistetetaan ehdot.

$$f(z_1 + z_1', z_2) = (z_1 + z_1') \otimes z_2 = z_1 \otimes z_2 + z_1' \otimes z_2 = f(z_1, z_2) + f(z_1', z_2),$$

$$f(z_1, z_2 + z'2) = z_1 \otimes (z_2 + z_2') = z_1 \otimes z_2 + z_1 \otimes z_2' = f(z_1, z_2) + f(z_1, z_2'),$$

$$f(rz_1, z_2) = (rz_1) \otimes z_2 = r(z_1 \otimes z_2) = rf(z_1, z_2) = f(z_1, rz_2), r \in \mathbb{R}.$$

b) Kuvajoukko $\varphi(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ sisältää ainakin kaikki tensoritulot $z_1 \otimes_{\mathbb{C}} z_2$, jotka muodostavat $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}$:n virittäjäjoukon jopa additiivisena ryhmänä $(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}, +)$. Koska φ on $\mathbb{R}$-lineaarisenä erityisesti ryhmähomomorfismi $+$:n suhteen, φ:n täytyy olla surjektiivinen.

Huomautus: Huomaa, että vetoaminen siihen, että tensoritulot virittävät $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-modulina ei riittää, sillä totesimme φ vain $\mathbb{R}$-lineaariseksi. Toisaalta $\mathbb{R}$-modulin struktuuri $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ voi kyllä laajentaa $\mathbb{C}$-modulin struktuuriksi esimerkiksi määrittelemällä

$$c(z_1 \otimes z_2) = cz_1 \otimes z_2$$

(pitää kyllä tarkistaa, että tämä on hyvin määritelty). Tällöin φ:stä tulee jopa $\mathbb{C}$-lineaarinen.

Osoitetaan, että φ ei ole injektiivinen. Esimerkin 8.13 mukaan vapaiden modulien R^n ja R^m tensoritulo $R^n \otimes_R R^m$ on kanonisella tavalla isomorfinen vapaan modulin R^{nm} kanssa mielivaltaisella vaihdannaisella renkaalla R. Lisäksi jos

$$\{e_i, i = 1, \ldots, n\}$$

on R^n:n kanta ja

$$\{e'_j, j = 1, \ldots, m\}$$

on R^m:n kanta, niin

$$\{e_i \otimes e'j, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m\}$$

on $R^n \otimes_R R^m$:n kanta.
Sovelletaan tämä moduliin $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$. $\mathbb{R}$-modulina $\mathbb{C}$ on 2-uloitteinen vektoriavaruus $\mathbb{R}^2$ kantana $\{1, i\}$. Näin ollen $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ on 4-uloitteinen $\mathbb{R}$-vektoriavaruus, kantana $\{1 \otimes 1, 1 \otimes i, i \otimes 1, i \otimes i\}$. Erityisesti $i \otimes 1$ ja $1 \otimes i$ ovat $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$:ssä eri alkiot. Kuitenkin

$$\varphi(1 \otimes i) = 1 \otimes_{\mathbb{C}} i = i(1 \otimes_{\mathbb{C}} 1) = i \otimes_{\mathbb{C}} 1 = \varphi(i \otimes 1).$$

Samoin $\varphi(i \otimes i) = i^2(1 \otimes 1) = -1(1 \otimes 1) = -1 \otimes 1 = \varphi(-1 \otimes 1)$, vaikka $i\otimes 1$ ja $-1\otimes 1 = -1(1\otimes 1)$ ovat eri alkiot $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$:ssä. Näin ollen φ ei ole injektio. Itse asiassa Harj.7 Teht. 3e):stä seuraa, että $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}$ on isomorfinen $\mathbb{C}$:n kanssa, joka on 2-ulotteinen $\mathbb{R}$-modulina. Tästä nähdään suoraan, että ei ole olemassa $\mathbb{R}$-lineaarisia injektioita $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

2. Olkoon A ykkösellinen R-algebra. Osoita, että on olemassa R-algebrojen homomorfismi $\varphi : R \to A$, jolle pätee $1_R \mapsto 1_A$. Osoita lisäksi, että jos R on kunta, R voidaan upottaa A:n alialgebraksi.

Ratkaisu: Jos $\varphi\colon R \to A$ on R-algebrahomomorfismi jolle pätee $\varphi(1_R) = 1_A$, niin täytyy olla

$$\varphi(r) = \varphi(r1_R) = r\varphi(1_R) = r1_A, r \in R,$$

itse asiassa näin täytyy olla jo koska φ on R-modulihomomorfismi. Määritellään siis $\varphi\colon \mathbb{R} \to A$ kaavalla

$$\varphi(r) = r1_A, r \in R.$$

Tällöin $\varphi(1_R) = 1_R 1_A = 1_A$. Osoitetaan, että φ on R-algebrahomomorismi. Olkoot $r, s \in R$. Tällöin

$$\varphi(r + s) = (r + s)1_A = r \cdot 1_A + s1_A,$$

$$\varphi(rs) = (rs)1_A = r(s1_A) = r\varphi(s),$$

sillä A on erityisesti R-moduli. Lisäksi

$$\varphi(r \cdot s) = \varphi(rs) = (rs)1_A = (rs)(1_A \cdot 1_A) = r(s(1_A \cdot 1_A)) =$$

$$= r(1_A \cdot (s1_A)) = (r1_A) \cdot (s1_A) = \varphi(r) \cdot \varphi(s),$$

sillä kertolasku $\cdot$ on R-lineaarinen.

Helposti nähdään, että φ:n ydin

$$\operatorname{Ker} \varphi = \varphi^{-1}(0)$$

on R:n aito ideaali. Jos R on kunta, niin sen täytyy olla triviaali ideaali $\{0\}$. Näin ollen φ on injektio.

3. Okoon A yksiulotteinen $\mathbb{Q}$-vektoriavaruus. Osoita, että mikäli määritellään tulo $ab = 0$ kaikilla $a, b \in A$, niin A on $\mathbb{Q}$-algebra ja jokainen A:n aito epätriviaali additiivinen aliryhmä on renkaan A ideaali, muttei Q-ideaali.

Ratkaisu: Nollakuvaus $f\colon A \times A \to A$, $f(a, b) = 0$ on selvästi R-bilineaarinen, joten tällä kertolaskulla varustettuna A on $\mathbb{Q}$-algebra. Olkoon $B \subset A$ epätriviaali aito additiivinen aliryhmä. Tällöin se on tietysti suljettu yhteenlaskun suhteen ja lisäksi jokaisella $a \in A, b \in B$ pätee

$$ab = ba = 0 \in B,$$

joten B on ideaali, kun A ajatellaan (ei ykkösellisenä!) renkaana. B ei kuitenkaan ole $\mathbb{Q}$-ideaali, sillä se ei ole edes $\mathbb{Q}$-alimoduli. Tämä on selvä, sillä $\mathbb{Q}$ on kunta ja A on yksiulotteinen sen suhteen, joten sen alimodulit ovat vain $\{0\}$ ja A itse.

4. Olkoon R vaihdannainen rengas ja M jokin R-moduli. *Tensorialgebra* $T(M)$ määritellään suorana summana

$$\bigoplus_{k=0}^{\infty} T_k(M),$$

missä $T_0(M) = R$ ja $T_{k+1}(M) = T_k(M) \otimes M$ kaikilla $k \geq 0$. Samastetaan kukin $T_k(M)$ vastaavan alimodulin $\iota_k(T_k(M)) \subset T(M)$ kanssa, missä ι_k on kanoninen injektio. Samastetaan lisäksi modulit $R \otimes M$ ja M tunnetun isomorfismin mukaisesti. Osoita, että $(x, y) \mapsto x \otimes y$ on hyvin määritelty bilineaarinen kertolasku R-modulissa $T(M)$ ja että $T(M)$ on tämän kertolaskun suhteen liitännäinen ja ykkösellinen R-algebra.

Ratkaisu: Osoitetaan ensin induktiolla, että (luonnollista isomorfiaa vaille) pätee $T_k(M) \otimes T_l(M) = T_{k+l}(M)$. Induktio etenee l:n suhteen. Jos $l = 0$, niin $T_k(M) \otimes T_0(M) = T_k(M) \otimes R =$

$T_k(M)$, kts. Harj.7 Teht. 3e. Oletetaan, että $T_k(M) \otimes T_l(M) = T_{k+l}(M)$ jollakin $l \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$T_k(M) \otimes T_{l+1}(M) = T_k(M) \otimes (T_l(M) \otimes M) = (T_k(M) \otimes T_l(M)) \otimes M = T_{k+l}(M) \otimes M = T_{k+l+1}(M),$$

kts. Harj.7 Teht 3c. Näin olleen kaikilla $k, l \in \mathbb{N}, x \in T_k(M), y \in T_l(M)$ pätee $x \otimes y \in T_{k+l}(M) \subset T(M)$, joten bilineaarinen kuvaus $f_{k,l} \colon T_k(M) \times T_l(M) \to T(M)$,

$$f_{k,l}(x, y) = x \otimes y$$

on olemassa. Pannaan vielä merkille, että isomorfismi-vastavuus $T_k(M) \otimes T_l(M) \cong T_{k+l}(M)$ on siis täsmällisesti määritelty virittäjille kaavalla

$$(r_1 \otimes x_1 \otimes \ldots \otimes x_k) \otimes (r_2 \otimes y_1 \otimes \ldots \otimes y_l) \mapsto r_1 x_1 \otimes \ldots \otimes x_k \otimes r_2 y_1 \otimes \ldots y_l = r_1 r_2 (x_1 \otimes \ldots x_k \otimes y_1 \ldots y_l).$$

Lisäksi voimme aina olettaa, että $r_1 = r_2 = 1_R$.

Jokainen alkio $x \in T(M)$ voidaan esittää yksikäsitteisellä tavalla jonona $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, missä $x_n \in T_n(M)$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$ ja $x_n \neq 0$ vain erillisen monella $n \in \mathbb{N}$. Tällöin pätee (muista identefikaatio $T_k(M) = \iota_k(T_k(M))$)

$$x = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n.$$

Huomaa, että tässä summattavista vain äärellinen määrä eroa nollasta, joten summa on hyvin määritelty.
Olkoon $y \in T(M)$ toinen alkio jonka esitys jonona on $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Nyt jos halutaan bilineaarinen kuvaus $f \colon T(M) \times T(M) \to T(M)$ jolle pätee $f | T_k(M) \times T_l(N) = f_{k,l}$ niin täytyy päteä

$$f(x, y) = f(\sum x_n, \sum y_m) = \sum_{n,m \in \mathbb{N}} f(x_n, y_m) = \sum_{n,m \in \mathbb{N}} f_{n,m}(x_n, y_m) = \sum_{n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}} x_n \otimes y_m.$$

Tästä nähdään, että f on yksikäsitteinen, jos on olemassa. Samalla nähdään, että ainoa tapa määritellä f on kaavalla

$$f(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}} x_n \otimes y_m.$$

Määritellään $f \colon T(M) \times T(M) \to T(M)$ tällä kaavalla. Se on hyvin määritelty, sillä summattavista jäsenistä vain äärellisen monta eroa nollasta. Helposti nähdään, että f on itse asiassa R-bilineaarinen. Se määrittelee siis $T(M)$:ssä R-algebran struktuuri. Osoitetaan vielä, että se on liittännäinen ja ykkösellinen. Ykkösalkiona toimii $1_R \in T_0(M)$. Liittänäisyys

$$(xy)z = x(yz)$$

riittää osoittaa kun $x = x_1 \otimes \ldots \otimes x_k \in T_k(M), y = y_1 \otimes \ldots \otimes y_l \in T_l(M), z = z_1 \otimes \ldots \otimes z_m \in T_m(M)$. Tämäntyyppisille alkioille se taas seuraa yleisestä tensoritulon liittännäisyydestä. Nimittään

$$xy = x_1 \otimes \ldots \otimes x_k \otimes y_1 \otimes \ldots \otimes y_l \in T_{k+l}(M),$$

$$yz = y_1 \otimes \ldots \otimes y_l \otimes z_1 \otimes \ldots \otimes z_m \in T_{l+m}(M), \text{ joten}$$

$$(xy)z = (x_1 \otimes \ldots \otimes x_k \otimes y_1 \otimes \ldots \otimes y_l) \otimes (z_1 \otimes \ldots \otimes z_m) =$$

$$x_1 \otimes \ldots x_k \otimes y_1 \otimes \ldots \otimes y_l \otimes z_1 \otimes \ldots \otimes z_m = (x_1 \otimes \ldots \otimes x_k) \otimes (y_1 \otimes \ldots \otimes y_l \otimes z_1 \otimes \ldots \otimes z_m) = x(yz).$$

5. Osoita, että on olemassa vain kolme keskenään epäisomorfista 2-ulotteista ykkösellistä realikertoimista algeraa.

Ratkaisu: Olkoon A 2-ulotteinen ykköksellinen realikertoiminen algera. Nyt $1_A \neq 0$ (muuten A olisi triviaali algebra $\{0\}$, joka ei ole 2-ulotteinen $\mathbb{R}$:n suhteen). Näin ollen tehtävän 2 nojalla 1_A:n virittämä alialgebra voidaan samastaa $\mathbb{R}$:n kanssa. Jono $\{1_A\}$ on vapaa, joten se voidaan täydentää A:n kannaksi $\{1_A, a\}$. Tällöin

$$a^2 = x1_A + ya = x + ya$$

joillakin $x, y \in \mathbb{R}$ eli a toteuttaa toisen asteen polynomiyhtälön

$$a^2 - ya - x = 0.$$

Palautetaan mieleen miten tällaisen yhtälön ratkaisukaava johdetaan - täydentämällä neliöksi. Soveltamalla sama temppu tässä yhteydessä saadaan

$$a^2 - ya - x = (a - y/2)^2 + (y/2)^2 - x = 0, \text{ joten}$$

$$(a - y/2)^2 = x - (y/2)^2 = r \in R.$$

Merkitään $b = a - y/2$. Koska $y/2 \in \mathbb{R}$ jono $\{1, b\}$ on myös A:n kanta ja pätee $b^2 = r \in \mathbb{R}$. Jos $r \neq 0$ niin

$$(b/\sqrt{|r|})^2 = r/|r| \in \{1, -1\}.$$

Korvaamalla tarvittaessa b samansuuntaisella vektorilla $(b/\sqrt{|r|})$ voidaan siis olettaa, että $b^2 \in \{0, 1, -1\}$. Lauseen 9.5 nojalla kannan $\{1, b\}$ kertotaulu määrää A:n ismorfiaa vaille yksikäsitteisesti. Koska joka tapauksessa

$$1 \cdot 1 = 1, 1 \cdot b = b = b \cdot 1$$

alkio $b^2 \in \{0, 1, -1\}$ määrää A:n täysin. Huomaa, että A on aina vaihdannainen ja liittännäinen, tämä seuraa helposti Lauseesta 9.4.

1) Jos $b^2 = -1$ A on isomorfinen tutun kompleksilukujen $\mathbb{R}$-algrebran $\mathbb{C}$ kanssa. Tämä on tunnetusti jopa kunta kertolaskun suhteen. Toinen tapa esittää A on polynomialgebran tekijäalgebrana $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$.

2) Jos $b^2 = 0$ A on isomorfinen $R[X]/(X^2)$ kanssa. Koska $b \neq 0$, mutta $b^2 = 0$ A ei ole renkaana kokonaisalue, joten se ei ole isomorfinen $\mathbb{C}$:n kanssa. Tämä algebra on esimerkki niin sanoituista "duaalilukujen "renkaista, joilla on tärkeitä sovelluksia mm. homologisessa algebrassa.
3) Jos $b^2 = 1$ A on isomorfinen algebran $\mathbb{R}[X]/(X^2 - 1)$. Tämä algebra ei ole renkaana edes kokonaisalue, sillä

$$(b-1)(b+1) = b^2 - 1 = 0,$$

missä $b - 1$ ja $b + 1$ ovat selvästi nollasta eroavat. Erityisesti A ei voi olla isomorfinen $\mathbb{C}$:n kanssa. A voidaan esittää myös tuloalgebrana $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, jossa kertolasku on siis määritelty koordinaatittain,

$$(x, y) \cdot (x', y') = (xx', yy').$$

Tämä voi perusteella huomaamalla, että $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ on 2-ulotteinen ykkösellinen $\mathbb{R}$-algebra, joka ei ole isomorfinen $\mathbb{C}$:n kanssa (ei ole kokonaisalue, sillä $(1, 0) \times (0, 1) = (0, 0)$) eikä $R[X]/(X^2)$:n kanssa, sillä minkä alkion neliö ei ole nolla-alkio $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Näin ollen sen täytyy olla isomorfinen $\mathbb{R}[X]/(X^2 - 1)$:n kanssa. Tästä myös seuraa, että $\mathbb{R}[X]/(X^2 - 1)$ ei ole isomorfinen $\mathbb{C}$:n tai $\mathbb{R}[X]/(X^2)$:n kanssa.
Voi myös todeta suoraan, että $\{1/2(1 + b), 1/2(1 - b)\}$ on A:n kanta, jolla on sama kertataulu kuin $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:n luonnollisella kannalla $\{(1, 0), (0, 1)\}$.

Näin ollen isomorfiaa vaille on olemassa tasan 3 2-ulotteista ykkösellistä $\mathbb{R}$-algebra. Lisäksi sellainen algebra on aina liittännäinen ja vaihdannainen.

6. Tarkastellaan symmetrisen ryhmän S_3 reaalista ryhmäalgebraa $\mathbb{R}S_3$.
   (a) Etsi algebrasta $\mathbb{R}S_3$ jokin yksiulotteinen alialgebra.
   (b) Algebra $\mathbb{R}S_3$ on myös $\mathbb{R}S_3$-moduli, kun skalaarikertolasku määritellään kaavalla $x.y = x \cdot y$. Etsi tästä modulista jokin yksiulotteinen $\mathbb{R}S_3$-alimoduli, joka on eri kuin kohdassa a) löydetty alialgebra.

Ratkaisu: a) Olkoon G äärellinen ryhmä ja R rengas. Osoitetaan yleisemmin, että RG:ssä on olemassa yksiulotteinen alialgebra. Riittää löytää $x \in RG, x \neq 0$ joka on vakaa G:n toiminnan suhteen, eli $gx = x$ kaikilla $g \in G$. Olkoon

$$x = \sum_{g \in G} 1_R g = \sum_{g \in G} g \in RG.$$

Tällöin $x \neq 0$ ja kaikilla $g' \in G$ pätee

$$gx = \sum_{g \in G} g'g = \sum_{g \in G} g = x,$$

sillä kuvaus $g \mapsto g'g$ on G:n permutaatio.
x:n virittämä alimoduli $\{rx | r \in \mathbb{R}\}$ on siis yksiulotteinen alialgebra. Itse asiassa se on jopa suljettu mielivaltaisen RG:n alkiolla kertomisen suhteen (myös oikealta), joten se on jopa ideaali ja RG-moduli.

Tästä myös seuraa, että jokaisella aliryhmällä $H \leq G$ vektori

$$x = \sum_{h \in H} h$$

virittää yksiulotteisen alialgebran RG:ssä. Erityisesti kun valitaan $H = \{e\}$ saadaan, että vektorin $e \in RG$ virittämä aliavaruus on alialgebra. Huomaa, että tämä esimerkki toimii jo mielivaltaiselle ryhmälle G.

b) $\mathbb{R}S_3$ on $\mathbb{R}S_3$-modulina yksiulotteinen. $\mathbb{R}$-modulina se on 6-ulotteinen, joten se ei voi olla sama kuin kohdassa a) löydetty alialgebra, joka oli 1-ulotteinen $\mathbb{R}$:n suhteen.