Matematiikan laitos
AlgebraII
Harjoitus 7
15.03.2011
Ratkaisuehdotuksia
Aleksandr Pasharin

1. Osoita, että jokainen Z-modulin $\mathbb{Q}$ vapaa osajoukko sisältää korkeintaan yhden alkion ja päättele tästä, että $\mathbb{Q}$ ei ole vapaa ryhmä.

   Ratkaisu: Koska vapaan osajoukon jokainen osajoukko on myös vapaa, riittää osoittaa, että kahden alkion $x = \frac{m}{n}, y = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ joukko ei ole koskaan vapaa $\mathbb{Z}$:n suhteen. Tehdään vasta-oletus, joukko $\{x, y\}, x \neq y$ on vapaa. Huomataan, että

   $$(np)x + (-mq)y = np\frac{m}{n} - mq\frac{p}{q} = pm - mp = 0.$$

   Koska $\{x, y\}$ on vapaa, pätee $np = 0 = mq$. Koska $n \neq 0 \neq q$, tästä seuraa, että $m = 0 = p$, joten $x = 0 = y$, mikä on ristiriitä.

   Osoitetaan vielä, että $\mathbb{Q}$ ei ole vapaa $\mathbb{Z}$-moduli. Tehdään vasta-oletus, olkoon X $\mathbb{Q}$:n $\mathbb{Z}$-kanta. Koska jokainen kanta on vapaa joukko, edellisestä seuraa, että X on tyhjä tai yksiö, $X = \{\frac{m}{n}\}$. Jos X on tyhjä, niin se virittää triviaalin $\mathbb{Z}$-modulin $\{0\}$, joka ei selvästikään ole isomorfinen $\mathbb{Q}$:n kanssa. Jos taas X on yksiö $\{\frac{m}{n}\}$, niin on olemassa $k \in \mathbb{Z}$ siten, että

   $$\frac{1}{2n} = k\frac{m}{n} = \frac{km}{n}, \text{ josta seuraa}$$

   $$(2n)km = n, \text{ eli}$$

   $$2km = 1.$$

   Tämä on kuitenkin mahdotonta, sillä $km \in \mathbb{Z}$ ja 1 ei ole jaollinen 2:llä $\mathbb{Z}$:ssä.

2. Olkoot M ja N R-moduleja. Oletetaan, että modulilla M on kanta B ja $f : B \to N$ on jokin kuvaus. Olkoon $\varphi : M \to N$ R-lineaarinen kuvaus, jolle pätee $\varphi(b) = f(b)$ kaikilla $b \in B$. Osoita, että
   (a) Kuvaus φ on injektio, jos ja vain jos kuvajoukko fB on vapaa.
   (b) Kuvaus φ on surjektio, jos ja vain jos kuvajoukko fB virittää modulin N.

Ratkaisu: a) Oletetaan, että φ on injektio. Osoitetaan, että fB on vapaa N:ssä. Olkoon

$$\sum_{i=1}^{n} r_i c_i = 0,$$

missä $c_i \in fB$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Tällöin jokaisella $i \in \{1, \ldots, n\}$ on olemassa $b_i \in B$ siten että $\varphi(b_i) = f(b_i) = c_i$. Näin ollen

$$\varphi(\sum_{i=1}^{n} r_i b_i) = \sum_{i=1}^{n} r_i \varphi(b_i) = \sum_{i=1}^{n} r_i c_i = 0.$$

Koska f on injektio, tästä seuraa, että

$$\sum_{i=1}^{n} r_i b_i = 0.$$

Koska B on vapaa, tästä seuraa, että $r_i = 0$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Näin ollen fB on vapaa.

Oletetaan kääntäen, että fB on kanta. Olkoon $x \in M$ siten että $\varphi(x) = 0$. Riittää osoittaa, että $x = 0$. Koska B on M:n kanta, niin on olemassa $r_i \in R$, $b_i \in B$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ siten, että

$$x = \sum_{i=1}^{n} r_i b_i.$$

Tästä saadaan

$$0 = \varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} r_i f(b_i).$$

Koska fB on kanta, tästä seuraa, että $r_i = 0$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$. Siis $x = 0$.

b) Helposti nähdään, että mielivaltaisen N:n osajoukon Y virittämä alimoduli on

$$< Y >= \{\sum_{i \in I} r_i y_i | I \text{ äärellinen }, r_i \in R, y_i \in Y\}$$

(vrt. Harj. 6 teht. 1). Erityisesti jos valitaan $Y = fB$ saadaan

$$< fB >= \{\sum_{i \in I} r_i f(b_i) | I \text{ äärellinen }, r_i \in R, y_i \in Y\}.$$

Koska φ on R-lineaarinen pätee

$$\sum_{i \in I} r_i f(b_i) = \sum_{i \in I} r_i \varphi(b_i) = \varphi(\sum_{i \in I} r_i b_i).$$

Koska B on M:n kanta (erityisesti on virittäjä joukko) tästä seuraa, että itse asiassa $< fB >$ on sama kuin kuvajoukko

$\varphi(M)$. Näin ollen φ on surjektio jos ja vain jos $< fB >= N$ eli jos ja vain jos fB virittää N.

3. Olkoot M, M', N ja P R-moduleita ja $\varphi : M \to M'$ (R-)isomorfismi. Todista seuraavat isomorfismit:
   (a) $M \otimes P \cong M' \otimes P$,
   (b) $M \otimes N \cong N \otimes M$,
   (c) $(M \otimes N) \otimes P \cong M \otimes (N \otimes P)$,
   (d) $(M \oplus N) \otimes P \cong (M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$,
   (e) $R \otimes M \cong M$, missä rengasta R ajatellaan R-modulina.

Ratkaisu: a) Tarkastellaan yhdistettyä kuvausta $f = \eta \circ \varphi \times \mathrm{id}\colon M \times P \to M' \otimes P$, missä $\varphi \times \mathrm{id}\colon M \times P \to M' \times P$ on tulokuvaus,

$$\varphi \times \mathrm{id}(m, p) = (\varphi(m), p),$$

ja $\eta\colon M' \times P \to M' \otimes P$ on kanoninen kuvaus $\eta(x, y) = x \otimes y$. Tarkistetaan, että f on R-bilineaarinen.

$$f(m+m', p) = \varphi(m+m')\otimes p = (\varphi(m)+\varphi(m'))\otimes p = \varphi(m)\otimes p+\varphi(m')\otimes p = f(m, p)+f(m', p),$$
$$f(m, p+p') = \varphi(m)\otimes(p+p') = \varphi(m)\otimes p+\varphi(m)\otimes p' = f(m, p)+f(m, p'),$$
$$f(rm, p) = \varphi(rm) \otimes p = (r\varphi(m)) \otimes p = r(\varphi(m') \otimes p) = rf(m, p),$$
$$f(m, rp) = \varphi(m) \otimes (rp) = r(\varphi(m') \otimes p) = rf(m, p).$$

Lauseen 8.9 nojalla f indusoi lineaarisen kuvauksen $\bar{f}\colon M \otimes P \to M' \otimes P$, jolle pätee

$$\bar{f}(m \otimes p) = \varphi(m) \otimes p$$

kaikilla $m \in M, p \in P$.

Soveltamalla sama konstuktio φ:n käänteiskuvaukseen saadaan osoitettua, että on olemassa lineaarisen kuvauksen $\bar{g}\colon M' \otimes P \to M \otimes P$, jolle pätee

$$\bar{g}(m' \otimes p) = \varphi^{-1}(m') \otimes p$$

kaikilla $m' \in M', p \in P$. Tällöin

$$\bar{g} \circ \bar{f}(m \otimes p) = \bar{g}(\varphi(m) \otimes p) = \varphi^{-1}(\varphi(m)) \otimes p = m \otimes p,$$

ja samalla tavalla

$$\bar{f} \circ \bar{g}(m' \otimes p) = m' \otimes p.$$

Koska tensoritulot $m \otimes p$ virittää $M \otimes P$:n ja $\bar{f}$ ja $\bar{g}$ ovat lineaarisia, tästä seuraa, että $\bar{g} \circ \bar{f} = \mathrm{id}$ ja samalla tavalla $\bar{f} \circ \bar{g} = \mathrm{id}$. Siis $\bar{f}$ on lineaarinen isomorfismi.

b) Todistettu kurssimateriaalissa, Lause 8.11.

c) Ensin kiinnitetään $p \in P$ ja määritellään $\alpha_p\colon M \times N \to M \otimes (N \otimes P)$ kaavalla

$$\alpha_p(m, n) = m \otimes (n \otimes p).$$

Tällöin α_p on bilineaarinen,

$$\alpha_p(m+m', n) = (m+m')\otimes(n\otimes p) = m\otimes(n\otimes p)+m'\otimes(n\otimes p) = \alpha_p(m, n)+\alpha_p(m', n),$$

$$\alpha_p(m, n+n') = m\otimes((n+n')\otimes p) = m\otimes(n\otimes p+n'\otimes p) = m\otimes(n\otimes p)+m\otimes(n'\otimes p) =$$

$$= \alpha_p(m, n) + \alpha_p(m, n'),$$

$$\alpha_p(rm, n) = (rm)\otimes(n\otimes p) = r(m\otimes(n\otimes p) = r\alpha_p(m, n) = r(m\otimes(n\otimes p) =$$

$$= m \otimes (r(n \otimes p)) = m \otimes (rn \otimes p) = \alpha_p(m, rn).$$

Universaaliominaisuuden 8.9 nojalla jokaisella $p \in P$ on olemassa R-lineaarinen kuvaus $f_p\colon M\otimes N \to M\otimes(N\otimes P)$. Seuraavaksi määritellään $f\colon (M \otimes N) \times P \to M \otimes (N \otimes P)$ kaavaalla

$$f(x, p) = f_p(x), x \in M \otimes N, p \in P.$$

Osoitetaan, että f on bilineaarinen. Yhtälöt

$$f(x + x', p) = f_p(x + x') = f_p(x) + f_p(x') = f(x, p) + f(x', p),$$

$$f(rx, p) = f_p(rx) = rf_p(x) = rf(x, p)$$

päätevät jokaisella $x \in M\otimes N$ ja $p \in P$, koska f_p on lineaarinen. Olkoot $m \in M, n \in N, p, p' \in P, r \in R$. Tällöin

$$f(m\otimes n, p+p') = f_{p+p'}(m\otimes n) = m\otimes(n\otimes(p+p')) = m\otimes(n\otimes p+n\otimes p') =$$

$$= m \otimes (n \otimes p) + m \otimes (n \otimes p') = f_p(m \otimes n) + f_{p'}(m \otimes n),$$

$$f(m\otimes n, rp) = f_{rp}(m\otimes n) = m\otimes(n\otimes(rp)) = r(m\otimes(n\otimes p)) = rf(m\otimes n, p).$$

Koska $f_p, f_{p'}, f_{p+p'}$ ovat lineaarisia ja alkiot $m \otimes n$ virittävät $M \otimes N$, niin ylläolevat yhtälöt päätevät kaikilla $x \in M \otimes N$. Näin ollen f on bilineaarinen. Lauseen 8.9 nojalla on olemassa lineaarinen kuvaus $\phi\colon (M \otimes N) \otimes P\colon M \otimes (N \otimes P)$ siten, että kaikilla $x \in M, y \in N, z \in P$ pätee

$$\phi((x \otimes y) \otimes z) = x \otimes (y \otimes z).$$

Samalla tavalla osoitetaan, että on olemassa lineaarinen kuvaus $\psi\colon M\otimes(N\otimes P) \to (M\otimes N)\otimes P$ siten, että kaikilla $x \in M, y \in N, z \in P$ pätee

$$\phi(x \otimes (y \otimes z)) = (x \otimes y) \otimes z.$$

Helposti nähdään, että ϕ ja ψ ovat toistensa käänteiskuvauksia. Siis ϕ ja ψ ovat isomorfismeja.

d) Määritellään $f\colon (M \oplus N) \times P \to (M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$. kaavalla

$$f((m, n), p) = (m \otimes p, n \otimes p).$$

Tarkistetaan, että f on bilineaarinen.

$$f((m+m',n+n'),p) = ((m+m')\otimes p,(n+n')\otimes p) = (m\otimes p+m'\otimes p, n\otimes p+n'\otimes p) =$$
$$= (m\otimes p, n\otimes p) + (m'\otimes p, n'\otimes p) = f((m,n),p) + f((m',n'),p),$$
$$f((m,n),p+p') = (m\otimes(p+p'), n\otimes(p+p')) = (m\otimes p+m\otimes p', n\otimes p+n\otimes p') =$$
$$= (m\otimes p, n\otimes p) + (m\otimes p', n\otimes p') = f((m,n),p) + f((m,n),p'),$$
$$f((rm,rn),p) = ((rm)\otimes p,(rn)\otimes n) = (r(m\otimes p), r(n\otimes p) = rf((m,n),p),$$
$$f((m,n),rp) = (m\otimes(rp), n\otimes(rp)) = (r(m\otimes p), r(n\otimes p)) = rf((m,n),p).$$

Tensoritulon universaaliominaisuus antaa lineaarisen kuvauksen $\phi\colon (M\oplus N)\otimes P \to (M\otimes P)\oplus(N\otimes P)$, jolle pätee

$$\phi((m,n)\otimes p) = (m\otimes p, n\otimes p) \text{ kaikilla } m\in M, n\in N, p\in P.$$

Kääntäen konstruoidaan $\psi_1\colon M\otimes P\colon (M\oplus N)\otimes P$, $\psi_2\colon N\otimes P\colon (M\oplus N)\otimes P$ siten, että

$$\psi_1(m\otimes p) = (\iota_1(m)\otimes p) = (m,0)\otimes p,$$
$$\psi_2(n\otimes p) = (\iota_2(n)\otimes p) = (0,n)\otimes p,$$

missä $\iota_1\colon M\to M\oplus N$, $\iota_2\colon N\to M\oplus N$ ovat kanonisen injektiot. Kuvaukset g_1, g_2 konstruoidaan taas määritelemällä ensin bilineaariset kuvaukset $M\times P\colon (M\oplus N)\otimes P$, $N\times P\colon (M\oplus N)\otimes P$ ja soveltamalla tensoritulon universaalia ominaisuutta. Lopuksi määritellään $\psi\colon (M\otimes P)\oplus(N\otimes P)\to(M\oplus N)\otimes P$ soveltamalla Lause 7.4. (suoran tulon universaaliominaisuus) kuvauksiin ψ_1, ψ_2. Pätee siis

$$\psi((m\otimes p),(n\otimes p)) = \psi_1(m\otimes p) + \psi_2(n\otimes p) = (m,0)\otimes p + (0,n)\otimes p =$$
$$= ((m,0)+(0,n))\otimes p = (m,n)\otimes p$$

kaikilla $m\in M, n\in N, p\in P$. Helposti nähdään, että ϕ ja ψ ovat toistensa käänteiskuvauksia.

e) Määritellään kuvaus $f\colon R\times M\to M$, $f(r,m) = rm$. Osoitetaan, että tämä on bilineaarinen.

$$f(r+r',m) = (r+r')m = rm + r'm = f(r,m) + r(r',m),$$
$$f(r,m+m') = r(m+m') = rm + rm',$$
$$f(rr',m) = (rr')m = r(r'm) = rf(r',m),$$
$$f(r,r'm) = r(r'm) = (rr')m = (r'r)m = r'(rm) = r'f(r,m).$$

Huomaa, että viimeisessä kohdassa tarvitaan R:n vaihdannaisuus.

Tensoritulon universaaliominaisuus implikoi, että on olemassa lineaarinen kuvaus $\phi\colon R\otimes M\to M$, jolle pätee

$$\phi(r\otimes m) = rm.$$

Kääntäen määritellään $\psi\colon M\to R\otimes M$ kaavalla

$$\psi(m) = 1\otimes m.$$

Helposti nähdään, että ψ on R-lineaarinen. Laskemalla saadaan

$$\psi\phi(r \otimes m) = \psi(rm) = 1 \otimes rm = r(1 \otimes m) = r \otimes m,$$

$$\phi\psi(m) = \phi(1 \otimes m) = 1m = m.$$

Näin ollen ϕ ja ψ ovat toistensa käänteiskuvauksia.

4. Olkoot R ja S renkatia, joilla on olemassa rengashomomorfismi $R \to S$. Osoita: jos $M = R^n$, niin M_S ja S^n ovat isomorfisia S-moduleina.

Ratkaisu: Palautetaan mieleen, että

$$M_S = S \otimes M,$$

missä tensoritulo otetaan R:n suhteen. S ajatellaan R-modulina, missä toiminta on määritely kuvauksen f avulla,

$$r \cdot s = f(r)s.$$

M_S on myös S-moduli, missä S:n toiminta on määritely virittäjille kaavalla

$$s(s' \otimes m) = (ss') \otimes m$$

(Mieti miksi tämä laskutoimitus on hyvin määritelty. Vaihdannaisuus tarvitaan.)

Jos ensin tarkastellaan esiintyvät objektit R-moduleina, niin edellisen tehtävän avulla saadaan

$$M_S = S \otimes R^n = S \otimes (\oplus_{i=1}^n R) \cong \oplus_{i=1}^n (S \otimes R) \cong \oplus_{i=1}^n S = S^n.$$

Kun analysoidaan tämän väitteiden todistus, nähdään, että eräs R-isomorfismi $\phi\colon M_S \to S^n$ on määritelty kaavalla

$$\phi(s \otimes (r_i)_{i=1}^n) = (r_i \cdot s)_{i=1}^n = (f(r_i)s)_{i=1}^n,$$

$s \in S, r_i \in R, i = 1, \ldots n$. Riittää tarkistaa, että ϕ on myös S-homomorfismi. Olkoot s, r_i kuten yllä, $s' \in S$. Tällöin (huom, S vaihdannainen)

$$\phi(s'(s \otimes (r_i)) = \phi((s's) \otimes (r_i)) = (f(r_i)s's) = s'(f(r)s) = s'\phi(s \otimes (r_i)).$$

Koska tensoritulot $s \otimes (r_i)$ virittävät M_S myös vaihdannaisena ryhmänä, helposti nähdään, että tästä seuraa kaava

$$\phi(s'x) = s'\phi(x) \text{ kaikilla } s' \in S, x \in M_S.$$

5. Osoita, että jokainen vaihdannainen ryhmä on jonkin vapaan vaihdannaisen ryhmän tekijäryhmä.

   Ratkaisu: Olkoon G vaihdannainen ryhmä eli $\mathbb{Z}$-moduli ja olkoon X jokin G:n virittäjäjoukko, esim $X = G$. Tarkastellaan X:n virittämä vapaa ryhmä $\mathbb{Z}^(X)$. Osajoukon sisältyvyyskuvaus $f\colon X \to G$ voidaan vapaan ryhmän universaaliominaisuuden nojalla (Lause 8.2) jatkaa homomorfismiksi

$$\varphi\colon \mathbb{Z}^(X) \to G.$$

   Joukko $fX = X$ virittää G:n, joten teht. 3b) nojalla φ on surjektio.
   On siis löydetty surjektiivinen homomorfismi $\varphi\colon \mathbb{Z}^(X) \to G$.. Isomorfialauseesta seuraa, että se indusoi isomorfismin G:n ja tekijäryhmän $\mathbb{Z}^(X)/\operatorname{Ker}(\varphi)$ välillä.

6. Tarkastellaan $\mathbb{Z}$-modulien tensorituloa $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.
   (a) Osoita, että on olemassa Z-lineaarinen kuvaus $\varphi : \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, jolle pätee $\varphi(x \otimes y) = xy$.
   (b) Osoita, että kuvaus $\psi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, missä $\psi(x) = x \otimes 1$, on surjektio ja kuvauksen φ käänteiskuvaus.

   Ratkaisu: a) Riittää osoittaa, että kuvaus $f\colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(x, y) = xy$ on $\mathbb{Z}$-bilineaarinen (Lause 8.9, tensoritulon universaaliominaisuus).

$$f(x + x', y) = (x + x')y = xy + x'y = f(x, y) + f(x', y),$$

$$f(x, y + y') = x(y + y') = f(x, y) + f(x', y),$$

$$f(nx, y) = (nx)y = n(xy) = nf(x, y), n \in \mathbb{Z}$$

$$f(x, ny) = x(ny) = n(xy) = nf(x, y), n \in \mathbb{Z}.$$

   b) Olkoot $x = \frac{m}{n}, y = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $k \in \mathbb{Z}$. Osoitetaan ensin, että ψ on $\mathbb{Z}$-lineaarinen eli ryhmähomomorfismi.

$$\psi(x + y) = (x + y) \otimes 1 = x \otimes 1 + y \otimes 1 = \psi(x) + \psi(y).$$

   Seuraavaksi lasketaan

$$\psi f(x \otimes y) = \psi(xy) = xy \otimes 1 = (xm/n) \otimes 1 = m(x/n) \otimes 1 = x/n \otimes m =$$

$$= x/n \otimes n(m/n) = n(x/n) \otimes m/n = x \otimes y.$$

   Koska tensoritulot $x \otimes y$ virittävat modulin $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ ja ψf on lineaarinen pätee siis

$$\psi f = \mathrm{id}.$$

   Kääntäen

$$f\psi(x) = f(x \otimes 1) = x \cdot 1 = x.$$

Siis ψ on f:n käänteiskuvaus, erityisesti surjektio.

Huomautus: Samalla tavalla voidaan todistaa, että jos R on kokonaisalue ja Q on sen jakokunta, niin $Q \otimes_R Q \cong Q$ kuvauksen $x \otimes y \mapsto xy$ välityksellä.