Matematiikan laitos
AlgebraII
Harjoitus 5
17.02.2011
Ratkaisuehdotuksia
Aleksandr Pasharin

1. Osoita, että ratkeavan ryhmän aliryhmät ovat ratkeavia.

   **Ratkaisu:** Olkoon $G$ ratkeava ja $H \leq G$. Olkoon

   $$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G_n = G$$

   normaali jono, jonka tekijät $G_{i+1}/G_i$ ovat vaihdannaisia.
   Määritellään $H_i = H \cap G_i$, $i = 0, \ldots, n$. Tällöin $H_0 = 1, H_n = H$.
   Jokaisella $i < n$ tarkastellaan homomorfismi $f\colon H_{i+1} \to G_{i+1}/G_i$, joka saadaan yhdistämällä inkluusio $H_{i+1} \hookrightarrow G_{i+1}$ ja kanoninen projektio $G_{i+1} \to G_{i+1}/G_i$. Helposti nähdään, että $f$:n ydin on $H_{i+1} \cap G_i = H \cap G_{i+1} \cap G_i = H \cap G_i = H_i$. Näin ollen$H_i$ on normaali aliryhmä $H_{i+1}$:ssä ja $H_{i+1}/H_i$ on isomorfinen ryhmän $f(H_{i+1})$ kanssa, joka on vaihdannaisen ryhmän $G_{i+1}/G_i$ aliryhmä, eli on myöskin vaihdannainen. Siis jono

   $$1 = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq H_n = H$$

   on normaali jono ja sen jokainen tekijä on vaihdannainen.

2. Osoita, että ratkeavan ryhmän tekijäryhmät ovat ratkeavia (eli jos $N \trianglelefteq G$ ja $G$ on ratkeava, niin $H = G/N$ on ratkeava).

   **Ratkaisu:** Olkoon

   $$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G_n = G$$

   $G$:n normaali jono, jonka tekijät ovat vaihdannaisia. Olkoon $\pi\colon G \to G/N$ kanoninen projektio. Määritellään jokaisella $i = 0, \ldots, n$ $G'_i = \pi(G_i)$. Merkitään $\pi$:n rajoittuma joukkoon $G_i$ maaliryhmänä $G'_i$ kuvauksena $\pi_i\colon G_i \to G'_i$. Koska jokainen $\pi_i$ on (näin määriteltynä) surjektiivinen homomorfismi aliryhmä $G'_{i+1} = \pi_i(G_{i+1})$ on normaali $G'_{i+1}$:ssä. Lisäksi $G'_0 = N = 1$ ja $G'_n = G/N$. Saadaan siis normaali jono

   $$1 = G'_0 \trianglelefteq G'_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G'_n = G/N.$$

   Osoitetaan, että sen tekijät ovat vaihdannaisia. Tarkastellaan surjektiivinen homomorfismi $f\colon G_{i+1} \to G'_{i+1}/G'_i$ joka saadaan yhdistettynä kuvauksesta $\pi_i\colon G_i \to G'_i$ ja kanonisesta projektiosta $G'_{i+1}\colon G'_{i+1}/G'_i$. Nyt $G_i$ sisältyy $f$:n ytimeen, joten $f$ määrittelee surjektiivisen homomorfismin $\bar{f}\colon G_{i+1}/G_i \to G'_{i+1}/G'_i$.

Näin ollen $G'_{i+1}/G'_i$ on isomorfinen $G_{i+1}/G_i$:n erän tekijäryhmän kanssa, joka on vaihdannainen, sillä $G_{i+1}/G_i$ on vaihdannainen. Siis jonon

$$1 = G'_0 \trianglelefteq G'_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G'_n = G/N$$

jokainen tekijä on vaihdannainen.

3. (a) Olkoon $G$ ryhmä ja $N$ sen normaali aliryhmä. Osoita, että $G$ on ratkeava, jos $N$ ja $G/N$ ovat ratkeavia.
   (b) Oletetaan, että $G$:llä on normaali jono, jonka kaikki tekijät ovat ratkeavia. Osoita, että $G$ on ratkeava.

**Ratkaisu:** a) Olkoon

$$1 = N = G'_0 \trianglelefteq G'_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G'_n = G/N$$

$G/N$:n normaali jono, jonka tekijät $G'_{i+1}/G'_i$ ovat vaihdannaisia. Olkoon $\pi\colon G \to G/N$ kanoninen projektio. Määritellään jokaisella $i = 0, \ldots, n$ $G_i = \pi^{-1}G'_i$. Tarkastellaan surjektiivinen homomorfismi $f\colon G_{i+1} \to G'_{i+1}/G'_i$ joka saadaan yhdistettynä $\pi$:n rajoittumasta $\pi_i\colon G_{i+1} \to G'_{i+1}$ ja kanonisesta projektiosta $G'_{i+1} \to G'_{i+1}/G'_i$. Helposti nähdään, että $f$:n ydin on tasan $G_i$, joten se on normaali $G_{i+1}$:ssä ja tekijäryhmä $G_{i+1}/G_i$ on isomorfinen $G'_{i+1}/G'_i$:n kanssa, joten se on vaihdannainen. Saadaan jono

$$N = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G_n = G,$$

jonka jokainen tekijä $G_{i+1}/G_i$ on vaihdannainen. Huomaa, että tämä ei ole normaalijono, sillä se ei alkaa triviaalista ryhmästä. Kuitenkin kun $N$ on ratkeava, niin sillä on normaalijono

$$1 = N_0 \trianglelefteq N_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq N_m = N,$$

jonka tekijät ovat vaihdannaisia. Yhdistämällä nämä kaksi jonoa saadaan normaalijono

$$1 = N_0 \trianglelefteq N_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq N_m = N == G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G_n = G,$$

jonka jokainen tekijä on vaihdannainen. Näin ollen $G$ on ratkeava.

b) Olkoon

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G_n = G$$

normaali jono, jonka jokainen tekijä $G_{i+1}/G_i$ on ratkeava. Osoitetaan induktiolla, että jokainen $G_i$ on ratkeava. Triviaali ryhmä $G_0$ on selvästi ratkeava. Oletetaan, että $G_i$ on ratkeava, $i < n$.

Tällöin $G_{i+1}$:llä on ratkeava normaali aliryhmä $G_i$ ja tekijäryhmä $G_{i+1}/G_i$ on ratkeva. a)-kohdan nojalla $G_{i+1}$ on ratkeva.

4. Osoita, että äärellinen ryhmä on ratkeava, jos ja vain jos sillä on normaali jono, jonka tekijät ovat jaotonta kertalukua olevia syklisiä ryhmiä.

**Ratkaisu:** Koska sykliset ryhmät ovat vaihdannaisia ehto on riittävä.
Oletetaan, että $G$ on ratkeava ja olkoon

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G_n = G$$

normaali jono, jonka tekijät ovat vaihdannaisia. Osoitetaan ensin, että sen jokaisella hiennonuksella on sama ominaisuus. Riittää tarkastella tapaus, jossa jonoon on lisätty yksi uusi jäsen. Näin ollen uusi jono on muotoa

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \ldots G_i \trianglelefteq K \trianglelefteq G_{i+1} \ldots \trianglelefteq G_n = G.$$

Tarkastellaan yhdistetty kuvaus $K \hookrightarrow G_{i+1} \to G_{i+1}/G_i$. Tämä on homomorfismi, jonka ydin on $G_i$, joten $K/G_i$ on isomorfinen $G_{i+1}/G_i$:n aliryhmän kanssa. Koska $G_{i+1}/G_i$ on oletuksen mukaan vaihdannainen, myös $K/G_i$ on. Toisaalta faktoroimalla projektio $\pi\colon G_{i+1} \to G_{i+1}/K$ $G_i$:n kautta (joka sisältyy ytimeen $K$) saadaan surjektiivinen homomorfismi $G_{i+1}/G_i \to G_{i+1}/K$, joten $G_{i+1}/K$ on ismorfinen vaihdannaisen ryhmän $G_{i+1}/G_i$ tekijäryhmän kanssa. Näin ollen $G_{i+1}/K$ on vaihdannainen. Väite on osoitettu.

Laajenetaan alkuperäinen normaali jono

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G_n = G$$

maksimaaliseksi eli kompositiojonoksi

$$1 = G'_0 \trianglelefteq G'_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G'_m = G.$$

Tämä on mahdollista, sillä $G$ on äärellinen. Edellä todistetun nojalla tämän kompositiojonon kaikki tekijät ovat vaihdannaisia. Toisaalta koska kyseessä on kompositiojono Lauseen 5.6 nojalla sen kaikki tekijät ovat yksinkertaisia. Kaikki tekijät ovat siis vaihdannaisia ja yksinkertaisia ryhmiä. Harj 4. Teht. 1 nojalla ne ovat syklisiä ja jaotonta kertalukua olevia.

5. (a) Olkoon $G$ ryhmä ja $Z(G)$ sen keskus. Osoita, että jos tekijäryhmä $G/Z(G)$ on syklinen, niin $G$ on vaihdannainen.

(b) Olkoon $p$ alkuluku. Osoita, että jokainen ryhmä, jonka kertaluku on $p^2$, on vaihdannainen.

Vihje: Käytä tietoa, että $p$-ryhmän keskus on epätriviaali.

**Ratkaisu:** a) Olkoon $\bar{x}$ syklisen ryhmän $G/Z(G)$ virittäjä ja olkoon $x \in G$ sellainen, että $xZ(G) = \bar{x}$. Tällöin jokaisella $g \in G$ on olemassa $n \in \mathbb{Z}$ jolle $gZ(G) = \bar{x}^n = x^n Z(G)$. Toisian sanoen on olemassa $h \in Z(G)$ jolle $g = x^n h$. Kaikki $G$:n alkiot voidaan siis esittää muodossa $x^n h$, missä $n \in \mathbb{Z}$ ja $h \in Z(G)$. Olkoot $a, b \in G$, jolloin on olemassa $n, m \in \mathbb{Z}$ ja $h, k \in Z(G)$ joille

$$a = x^n h, b = x^m k.$$

Tällöin

$$ab = x^n h x^m k = x^n x^m (hk) = (x^{n+m} h)k = k(x^{n+m} h) = (kx^m)(x^n h) = ba,$$

sillä $h$ ja $k$ kommutoivat kaikkien $G$:n alkioiden kanssa. Näin ollen $G$ on vaihdannainen.

b) Olkoon $G$ ryhmä jonka koko on $p^2$, $p$ alkuluku. Tällöin jokaisen aliryhmän koko on 1, $p$ tai $p^2$, erityisesti sama pätee keskukselle $Z(G)$. Toisaalta $G$ on $p$-ryhmä, joten sen keskus on epätriviaali. Jos $|Z(G)| = p$, niin $G/Z(G)$:n koko on $p$, joten sen on pakko olla syklinen. a)-kohdan perusteella $G$ on vaihdannainen, jolloin itse asiassa $|Z(G)| = p^2$ ja saadaan ristiriita. Näin ollen jäljellä on tapaus $|Z(G)| = p^2$, mikä on yhtäpitävä sen kanssa, että $G = Z(G)$ eli $G$ on vaihdannainen.

*Huomautus:* Nyt on helppo luokitella kaikki ryhmät $G$ joiden koko on $p^2$. Jos $G$:llä on alkio, jonka kertaluku on $p^2$, niin $G$ on syklinen ryhmä $\mathbb{Z}_{p^2}$. Muuten jokaisen neutraalialkiosta eroavan alkion kertaluku on $p$. Poimitaan $x \in G, x \neq e$ ja olkoon $H$ sen virittämä aliryhmä, $|H| = p$. Tällöin $H$:n komplementti on epätyhjä, joten on olemassa $y \notin H$. Olkoon $K$ $y$:n virittämä ryhmä. Tällöin $H \cong \mathbb{Z}_p \cong K$, ja $H \cap K = \{1\}$. Lisäksi molemmat ryhmät $H$ ja $K$ ovat normaaleja $G$:ssä, sillä se on vaihdannainen. Laskemalla $HK$:n koko vaikkapa kaavalla

$$|HK| = |H||K|/|H \cap K|$$

(kts. Harj 4 teht. 2) nähdään, että $HK = G$. Nyt Lause 4.9 implikoi, että $G \cong H \times K = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.

6. Etsi kaikki ryhmät, joissa on täsmälleen 10 alkiota.

**Ratkaisu:** Olkoon $G$ ryhmä, jossa $10 = 2 \cdot 5$ alkiota. Sylowin lauseen nojalla $G$:llä on aliryhmä $H$ jonka koko on 5. Tällöin $H \cong \mathbb{Z}_5$ ja $H$:n indeksi $G$:ssä on 2, joten $H$ on normaali $G$:ssä. Toisaalta Sylowin lauseen nojalla on olemassa myös 2:n alkion aliryhmä aliryhmä $K \cong \mathbb{Z}_2$. Koska 2 ja 5 ovat suhteellisia alkulukuja, leikkaus $H \cap K = \{1\}$. Harj. 4 teht. 2:stä seuraa tällöin, että

$$|HK| = |H| \cdot |K|/|H \cap K| = 5 \cdot 2 = 10,$$

joten $G = HK$. Jokainen $g \in G$ voidaan siis esittää muodossa $hk$, missä $h \in H, k \in K$. Lisäksi tämä esitys onkin yksikäsitteinen, sillä jos $hk = h'k'$ niin

$$h'^{-1}h = kk'^{-1} \in H \cap K = \{1\},$$

joten $h = h', k = k'$. Näin ollen joukkon $G$ voidaan samastaa joukon $H \times K$ kanssa jonka alkiot ovatvpareja $(h, k), h \in H, k \in K$. Pari $(h, k)$ samastetaan siis alkion $hk$ kanssa. Jäljelle on selvittää miten laskutoimitus on määritelty näille pareille. Huomataan, että

$$(hk)(h'k') = (h(kh'k^{-1}))(kk'),$$

missä $kh'k^{-1} \in H$, koska $H$ on normaali $G$:ssä. Näin ollen jos käytetään samastusta $H \times K$:n kanssa, laskutoimitus on oltava määritelty kaavalla

$$(h, k) \cdot (h', k') = (h\phi_k(h'), kk'),$$

missä $\phi_k$:llä merkitään konjugointtikuvausta $\phi_k \colon H \to H$

$$\phi_k(g) = kgk^{-1}.$$

Tällöin $\phi_k$ on $H$:n automorfismi ja $\phi \colon K \to \mathrm{Aut}(H)$, $\phi(k) = \phi_k$ on ryhmähomomorfismi. Kun $\phi$ tunnetaan, tunnetaan myös koko ryhmä. Näin ollen riittää tutkia homomorfismit $K \to \mathrm{Aut}(H)$ eli homomorfismit $\mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_5)$.

Ryhmä $\mathbb{Z}_2$ on kahden alkion syklinen ryhmä, joten homomorfismit $\mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_5)$ vastavat yksikäsitteisesti $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_5)$:n alkioita $f$ joille pätee $f^2 = \mathrm{id}$, eli identtikuvausta tai automorfismeja $\mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5$, joiden kertaluku on tasan 2.

Olkoon $f \colon \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5$ automorfismi ja olkoon $a \in \mathbb{Z}_5$ jokin sen kiinnitetty virittäjä (esim. $\bar{1}$). Tällöin $f(a)$ on myös virittäja, eli tässä tapauksessa mielivaltainen neutraalialkiosta eroava alkio ja $f(a)$ määrää $f$:n yksikäsitteisesti. Näin ollen on olemassa tasan 4 automorfismia $f_i \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_5)$, $f_i(a) = a^i$, $i = 1, \ldots, 4$. Käymällä läpi eri vaihtoehdot nähdään, että $f_i^2 = \mathrm{id}$ pätee vain arvoilla $i = 1$ ja $i = 4$.

Kun $i = 1$ saadaan identtinen kuvaus. Tällöin homomorfismi

$\phi\colon K \to \mathrm{Aut}(H)$ on triviaali, samoin on konjugointti ja saadaan vaihdannainen suora tulo $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2$, joka on itse asiassa sama kuin syklinen ryhmä $\mathbb{Z}_{10}$.
Kun taas $i = 4$ helposti nähdään että $f_i$ on käänteisalkiokuvaus, $f_i(x) = x^{-1}$, sillä $a^4 = a^{-1}$. Näin ollen $K$:n virittäjä $b$ (jonka kertaluku on 2) toimii konjugoinnilla $H$:ssä säännöllä

$$bhb^{-1} = h^{-1}.$$

Koska tämä sääntö määrää ryhmän yksikäsitteisesti nähdään, että $G$:n täytyy olla isomorfinen Diedriryhmän $D_{10}$ kanssa (kts. Häsän moniste, 3.3., vrt. Lauseeseen 3.10) eli siis säännöllisen 5-kulmion symmetriaryhmän kanssa. Toinen tapa ilmaista tämä ryhmä on ajatella se ryhmien $\mathbb{Z}_2$ ja $\mathbb{Z}_5$ *puolisuorana* tulona, jonka määrää täysin yksikäsitteisesti konjugointtisääntö

$$bab^{-1} = a^{-1}.$$

Siis isomorfiavaille on olemassa vain kaksi ryhmää, joiden kertaluku on 10, syklinen ryhmä $\mathbb{Z}_{10}$ ja ei-vaihdannainen ryhmä $D_{10}$.

*Huomautus:* Samalla tavalla voidaan osoittaa yleisemmin, että jos $p > 2$ on alkuluku, niin on olemassa isomorfiaa vaille tasan kaksi ryhmää, joiden koko on $2p$ - syklinen ryhmä $\mathbb{Z}_{2p}$ ja Diedriryhmä $D_{2p}$. Todistus etenee samalla tavalla ja ainoa vaikkeus on osoittaa, että $\mathrm{Aut}(Z_p)$:llä on vain yksi alkio, jonka kertaluku on tasan 2. Hieman yleisemmin voidaan osoittaa, että $\mathrm{Aut}(Z_p)$ on itse asiassa syklinen ryhmä, jonka kertaluku on $p-1$, mistä seuraa, että kertalukua 2 olevia alkioita on tasan 1 (jos tämä ei ole selvä, mieti mitä aliryhmiä syklisellä ryhmällä on).