Matematiikan laitos
AlgebraII
Harjoitus 4
21.01.2011
Ratkaisuehdotuksia
Aleksandr Pasharin

1. Olkoon G ryhmä. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:
   (i) $G \neq \{1\}$ ja G:n ainoat aliryhmät ovat G ja $\{1\}$.
   (ii) $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, missä p on alkuluku.
   (iii) $|G|$ on alkuluku.
   (iv) G on yksinkertainen ja vaihdannainen.

   Ratkaisu: (i)$\Rightarrow$(iii)Olkoon $g \in G, g \neq e$. Tällöin g:n virittämä aliryhmä $H = \{g^k : k \in \mathbb{N}\}$ ei ole $\{1\}$, joten sen täytyy olla koko G eli G on syklinen. Jos G on ääretön (eli g:n kertaluku on ääretön), niin se on isomorfinen $(\mathbb{Z}, +)$:n kanssa. Kuitenkin $\mathbb{Z}$:llä on epätrivialeja aitoja aliryhmiä esim. $2\mathbb{Z}$, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa. Näin ollen g:n kertaluku on äärellinen joten $|G| = n > 1$ on äärellinen. Olkoon p sen alkulukutekijä ja olkoon $q = n/p$. Tällöin $h = g^q$ on G:n alkio jonka kertaluku on p, joten sen virittämässä aliryhmässä K on tasan p alkiota. Toisaalta oletuksen nojalla on oltava $G = K$.

   (iii)$\Rightarrow$(ii) Tunnettua. Nimittäin jos $|G|$ on alkuluku p jokaisen alkion $g \in G, g \neq e$ kertaluku on oltava p, joten g virittää G:n ja G on syklinen, mistä helposti saadaan väite.

   (ii)$\Rightarrow$(iv) $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ on selvästi vaihdannainen. Koska p on alkuluku jokaisen alkion kertaluku on p (paitsi e):n mistä seuraa, että jokainen alkio virittää koko ryhmän (kuten yllä). Tästä seuraa, että jokainen epätriviaali aliryhmä on koko ryhmä, sillä se sisältää jonkun alkionsa $g \neq e$ virittämän aliryhmän. Erityisesti G:llä ei ole aitoja epätriviaaleja normaaleja aliryhmiä, joten G on yksinkertainen.

   (iv)$\Rightarrow$(i) Seuraa yksinkertaisen ryhmän määritelmästä ja siitä, että vaihdannaisen ryhmän jokainen aliryhmä on normaali.

2. Olkoot $H, K \leq G$ äärellisiä aliryhmiä. Osoita, että

$$|HK| = |H||K|/|H \cap K|.$$

   Huomaa, että tässä ei oleteta tulon HK olevan ryhmä.

Ratkaisu: Joukko HK voidaan esittää K:n eräiden sivuluokkien yhdisteenä, sillä

$$HK = \bigcup_{h \in H} hK.$$

Jokaisen sivuluokan hK koko on $|K|$ ja erillaiset sivuluokat ovat erillisiä, joten kyseessä on erillinen yhdiste. Näin ollen

$$|HK| = n|K|,$$

missä $n \in \mathbb{N}$ on erillaisten muotoa hK sivuluokkien lukumäärä. Riittää siis laskea n.

G toimii vasemmalta K:n vasempien sivuluokkien joukossa G/K kanonisella tavalla,

$$g \cdot g'K = (gg')K.$$

Tarkastellaan tämän toiminnan rajoittuma aliryhmään H. Sivuluokat hK, $h \in H$ ovat tällöin täsmälleen alkion $K \in G/K$ radan alkiot tämän toiminnan suhteen. Lauseen 2.4 mukaan radan koko on $|H|/|H_K|$, missä H_K on alkion K kiinnittäjä. Mutta $h \in H_K$ jos ja vain jos

$$hK = K \text{ eli jos ja vain jos } h \in K.$$

Näin ollen $H_K = H \cap K$, joten $n = |H|/|H \cap K|$.

3. Olkoon G äärellinen ryhmä ja $\varphi : G \to H$ surjektiivinen homomorfismi. Merkitään $\mathrm{Syl}_p(G)$:llä G:n Sylowin p-aliryhmien joukkoa ja $n_p(G) = |\mathrm{Syl}_p(G)|$. Osoita:
   (a) Jos $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$, niin $\varphi(P) \in \mathrm{Syl}_p(H)$.
   (b) Jos $Q \in \mathrm{Syl}_p(H)$, niin $Q = \varphi(P)$ jollakin $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$
   (c) $n_p(H) \leq n_p(G)$.

Ratkaisu: a) Harjoitus 2 tehtävän 1c) nojalla $\varphi(P)$:n kertaluku on P:n keraluvun tekijä. Tästä seuraa, että $\varphi(P)$ on ainakin p-aliryhmä.
Toisaalta harjoitus 2 tehtävän 1b) nojalla $[H : \varphi(P)] = [\varphi(G) : \varphi(P)]$ on $[G : P]$:n tekijä. Tästä seuraa, että $[H : \varphi(P)]$ ei ole jaollinen p:llä, joten $\varphi(P)$:n täytyy olla Sylowin p-aliryhmä H:ssä.

b) Olkoon P jokin G:n Sylowin p-aliryhmä. Tällöin a)-kohdan nojalla $\varphi(P) \in \mathrm{Syl}_p(H)$. Koska kaikki Sylowin p-aliryhmät ovat toistensa konjugaatteja, on olemassa $h \in H$ jolle $Q = h\varphi(P)h^{-1}$.

Koska φ on surjektio on olemassa $g \in G$ jolle $h = \varphi(g)$. Näin ollen

$$Q = h\varphi(P)h^{-1} = \varphi(g)\varphi(P)\varphi(g)^{-1} = \varphi(gPg^{-1}) = \varphi(P'),$$

missä $P' = gPg^{-1}$ on Sylowin p-aliryhmä G:ssä.

c) Kohdan a)-perusteella voidaan määritellä kuvaus $\Phi\colon \operatorname{Syl}_p(G) \to \operatorname{Syl}_p(H)$, $\Phi(P) = \varphi(P)$. Kohdasta b) seuraa, että Φ on sujektiivinen. Näin ollen

$$n_p(H) = |\operatorname{Syl}_p(H)| \leq |\operatorname{Syl}_p(G)| = n_p(G).$$

4. Olkoon G äärellinen ryhmä, $H \leq G$ ja $P \in \operatorname{Syl}_p(H)$. Osoita, että jos $N_G(P) \subseteq H$, niin $P \in \operatorname{Syl}_p(G)$.

Ratkaisu: Kirjoitetaan $|G|$:n kertaluku muodossa $|G| = p^k m$, missä m ei ole jaollinen m:llä. Tällöin aliryhmän H kertaluku on $|H| = p^i d$, missä $i \leq k$ ja d on m:n tekijä. Nyt $|P| = p^i$, joten P on Sylowin myös G:ssä jos ja vain jos $i = k$, mikä on ekvivalentti sen kanssa, että $|G/H|$ ei ole jaollinen p:llä.
Tarkastellaan P:n kanonista toimintaa joukossa G/H, $p \cdot gH = (pg)H$. Tällöin G/H on tämän toiminnan ratojen erillinen yhdiste ja jokaisen radan koko on $|P|$:n tekijä eli joku p:n potenssi. Erityisesti se on joko jaollinen p:llä tai on yksiö, jolloin sen alkio on toiminnan kiintopiste. Näin ollen riittää osoittaa että kiintopisteiden joukko ei ole jaollinen p:llä.

Olkoon gH kiintopiste, tällöin siis $pgH = gH$ kaikilla $p \in P$, joten $g^{-1}Pg \subset H$. Merkitään $P' = gPg^{-1}$, tällöin P' on H aliryhmä. Toisaalta se on $|P|$:n kokoinen, joten P' on myös Sylowin p-aliryhmä H:ssä. Kaikki Sylowin p-aliryhmät ovat toistensa konjugaatteja, joten $P' = hPh^{-1}$ jollakin $h \in H$. Siis

$$gPg^{-1} = hPh^{-1}, \text{ eli}$$

$gh^{-1} \in N_G(P) \subseteq H$. Tästä seuraa, että $g \in hH = H$. Näin ollen $gH = H$. Toisaalta H on toiminnan kiintopiste, sillä $P \subset H$, joten $pH = H$ kaikilla $p \in P$. Siis toiminnalla on tasan yksi kiintopiste. Koska 1 ei ole jaollinen p:llä väite seuraa.

5. Olkoon $P \in \operatorname{Syl}_p(G)$. Osoita, että

$$N_G(N_G(P)) = N_G(P).$$

Ratkaisu: Olkoon $g \in N_G(N_G(P))$ eli $gN_G(P)g^{-1} = N(P)$. Tällöin erityisesti $gPg^{-1} \subset N_G(P)$. Merkitään $P' = gPg^{-1}$. Tällöin P ja P' ovat molemmat $N_G(P)$:n Sylowin aliryhmät. Toisaalta normalizerin $N_G(P)$ määritelmän nojalla P on normaali $N_G(P)$:ssä, joten se on ainoa $N_G(P)$:n Sylowin p-aliryhmä. Näin ollen $gPg^{-1} = P' = P$, joten $g \in N_G(P)$.

6. Osoita, että mikään ryhmä, jonka kertaluku on 80, ei ole yksinkertainen.

   Ratkaisu: Olkoon G ryhmä, jossa on 80 alkiota. Alkulukuhajotelma antaa $80 = 5 \cdot 16$. Tarkastellaan ensin Sylowin 5-aliryhmiä. Lauseen 4.4(iii) perusteella niiden lukumäärä s_5 on luvun 16 tekijä ja $s_p \equiv 1 (mod\ 5)$. Käymällä läpi luvun 16 tekijät nähdään, että $s_p = 1$ tai $s_p = 16$. Jos $s_p = 1$ Sylowin 5-aliryhmä on ainoa, joten se on normaali ja olemme valmiit. Muuten $s_p = 16$. Koska erillaiset 5:n alkion aliryhmät leikkavat vain neutraalialkion kohdalla, yhdessä ne sisältyvät (neutraalialkiota lukunottamatta) $4 \cdot 16 = 64$ alkiota. Jäljelle jää $80 - 64 = 16$ alkiota. Koska mikä tahansa 16 alkion aliryhmä ei voi sisältää alkioita joiden kertaluku on 5, tällaisia ryhmiä on korkeintaan yksi. Toisaalta Sylowin lauseen 4.4. G:llä on ainakin yksi 16 alkion aliryhmä. Näin ollen Sylowin 2-aliryhmiä on tasan yksi, joten se on normaali.