Matematiikan laitos
AlgebraII
Harjoitus 3
03.03.2011
Ratkaisuehdotuksia
Aleksandr Pasharin

1. Ryhmän sisäiset automorfismit ovat muotoa $f_x(y) = xyx^{-1}$ olevat automorfismit (ks. HT2.6). Niiden joukkoa merkitän $\mathrm{Inn}(G)$. Osoita, että
$$\mathrm{Inn}(G) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(G),$$
missä $\mathrm{Aut}(G)$ on G:n automorfismien ryhmä (laskutoimituksena kuvausten yhdistäminen).

   Ratkaisu: Olkoon $f_x \in \mathrm{Inn}(G)$ ja $g \in \mathrm{Aut}(G)$. Rittää osoittaa, että $gf_xg^{-1} \in \mathrm{Inn}(G)$. Olkoon $a \in G$. Tällöin
$$gf_xg^{-1}(a) = g(xg^{-1}(a)x^{-1}) = g(x)g(g^{-1}(a))g(x)^{-1} = g(x)ag(x)^{-1} = f_{g(x)}.$$
   Näin ollen $gf_xg^{-1} = f_{g(x)} \in \mathrm{Inn}(G)$.

2. Oletetaan, että ryhmä G toimii joukossa X ja että $g, h \in G$ kuuluvat samaan konjugaattiluokkaan. Osoita, että $|\operatorname{Fix}(g)| = |\operatorname{Fix}(h)|$.

   Ratkaisu: Olkoon $a \in G$ sellainen, että $g = a^{-1}ha$. Tarkastellaan kuvauksen $a\colon X \to X$ rajoittuma joukkoon $\mathrm{Fix}(g)$. Jos $x \in \mathrm{Fix}(g)$, niin
$$h(ax) = (ha)x = (ag)x = ax,$$
   näin ollen $ax \in \mathrm{Fix}(h)$. Siis $a\colon \mathrm{Fix}(g) \to \mathrm{Fix}(h)$. Koska $h = aga^{-1}$, niin vaihtamalla g:n ja h:n roolit yllä saadaan $a^{-1}\colon \mathrm{Fix}(h) \to \mathrm{Fix}(g)$. Näin ollen a kuvaa $\mathrm{Fix}(g)$:n bijektiivisesti joukkoon $\mathrm{Fix}(h)$. Erityisesti on olemassa bijektio $\mathrm{Fix}(g)$:n ja $\mathrm{Fix}(h)$:n välillä.

3. Osoita:
   (a) Jos $\sigma, \rho \in S_n$ ovat erillisiä syklejä, niin $\sigma \circ \rho = \rho \circ \sigma$.
   (b) Jokainen $\sigma \in S_n \backslash \{\mathrm{id}\}$ on pareittain erillisten syklien tulo ja esitys on tekijöiden järjestystä vaille yksikäsitteinen.
   (c) Esitä
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \in S_6$$
   erillisten syklien tulona sekä vaihtojen tulona. Laske $\mathrm{sgn}(\sigma)$.
   (d) Osoita, että $S_n = \langle (12)(12\cdots n) \rangle$.

Ratkaisu: a) Olkoot $\sigma = (a_0 a_1 \ldots a_k)$, $\rho = (b_0 b_1 \ldots b_l)$. Erillisyys tarkoittaa, että $\{a_0, a_1, \ldots, a_k\} \cap \{b_0, b_1, \ldots, b_l\} = \emptyset$. Saadaan

$$\sigma \circ \rho(a_i) = \sigma(a_i) = a_{i+1} = \rho(a_{i+1}) = \rho \circ \sigma(a_i),$$
$$\sigma \circ \rho(b_j) = \sigma(b_{j+1}) = b_{j+1} = \rho(b_j) = \rho \circ \sigma(b_j),$$

missä $i+1$ lasketaan mod $k+1$ ja $j+1$ lasketaan mod $l+1$ Jos $x \notin \{a_0, a_1, \ldots, a_k\} \cup \{b_0, b_1, \ldots, b_l\}$ niin $\sigma(x) = x = \rho(x)$. Myös tällöin pätee

$$(\sigma \circ \rho)(x) = x = (\rho \circ \sigma)(x).$$

b)Olkoon $\sigma \in S_n$. Merkitään G:llä σ:n virittämää aliryhmää $\{\sigma^k : k \in \mathbb{Z}\}$. G toimii joukossa $\{1, \ldots, n\}$ luonnollisella tavalla (S_n:n toiminnan rajoittuma). Oletetaan, että

$$\sigma = \sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_k$$

on esitetty erillisten syklien tulona. Oletetaan että $x \in \{1, \ldots, n\}$ ja sen rata G:n toiminnan suhteen ei ole yksiö (eli x ei ole σ:n kiintopiste). Tällöin on olemassa tasan yksi sykli σ_i joka ei pidä x paikallaan (erillisyyden perusteella). Voidaan kirjoittaa $\sigma_i = (a_1 a_2 \ldots a_m)$, missä $a_1 = x$. Tällöin $\sigma(x) = \sigma_i(x) = a_2$. Toistamalla sama päättely saadaan $\sigma(a_k) = a_{k+1}$ kun $k < m$, $\sigma(a_m) = a_1 = x$, mistä alkaen $\sigma^j(x)$:n arvot alkaa toistua syklisesti. Näin ollen $\{a_1, \ldots, a_m\}$ on x:n rata G:n toiminnan suhteen. Kääntäen jokainen $\sigma_i = (a_1 a_2 \ldots a_m)$ vastaa a_1:n rata kuten yllä. Näin ollen kokoelma $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ määräytyy täysin G:n toiminnalla, joka riippuu vain σ:stä. Tämä osoittaa yksikäsitteisyyden.

Yksikäsitteisyyden todistuksesta saadaan myös vinkki miten olemassaolo voi todistaa. Nimittäin olkoot $A_1, \ldots, A_m$ G:n radat, jotka eivät ole yksiöitä eli vastaavat σ:n kiintopisteitä. Valitaan jokaisessa A_j edustaja $x_j \in A_j$ ja määritellään sykli

$$\sigma_j = (x_j \ \sigma(x_j) \ \sigma^2(x_j) \ \ldots \ \sigma^k(x_j)),$$

missä $\sigma^{k+1}(x_j) = x_j$. Tälläinen varmasti löytyy, koska G on äärellinen. Koska radat ovat erilliset näin konstruoidut syklit σ_j ovat myös erillisiä. Konstruktion perusteella helposti nähdään, että σ on tulo $\sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_m$.

c)

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \in S_6$$

b)-kohdan olemassaolo-todistus antaa myös konkrettisen algoritmin sykli-hajotelmaan löytämiseksi. Otetaan mielivaltainen alkio $x \in \{1, \ldots, n\}$ ja lasketaan sen rata σ:n suhteen eli arvot $\sigma(x), \sigma(\sigma(x)$ jne. kunnes törmätään taas alkion 1. Ylläannettuun σ:aan sovellettuna tämä antaa syklin (1423). Seuraavaksi otetaan alkio joka ei ole 1:n radassa - vaikkapa alkio 5. Sen radassa on vain kaksi alkiota - 5 ja 6. Saadaan siis hajotelma

$$\sigma = (1423)(56).$$

Esitetään vielä σ vaihtojen tulona. Koska sykli (56) on jo vaihto, riittää esittää sykli (1423) vaihtojen tulona. Kurssimateriaalin sivulta 25 voi luntata suoraan, että m-sykli on esitettävissä vaihtojen tulona seuraavasti:

$$(a_1 a_2 \cdots a_m) = (a_1 a_2)(a_2 a_3) \cdots (a_{m-1} a_m)$$

(tarkista, että kaava on tosi). Kun tämä sovelletaan sykliin (1423) saadaan esitys

$$(1423) = (14)(42)(23).$$

Näin ollen

$$\sigma = (14)(42)(23)(56).$$

Koska σ voidaan esittää 4:n vaihdon tulon, σ:n etumerkki on $(-1)^4 = 1$.

d) *Ratkaisutapa 1:* Osoitetaan väite induktiolla n:n suhteen. Kun $n = 2$ $S_2 = \{\mathrm{id}, (12)\}$, joten väite on tosi.
Oletetaan, että väite pätee $n-1$:lle. Merkitään $\sigma = (12)$, $\tau = (12 \cdots n)$. Olkoon G näiden virittämä aliryhmä. Suoraan laskemalla nähdään, että G sisältää alkiot

$$\sigma\tau = (23 \cdot n) \text{ ja}$$
$$\tau\sigma\tau^{-1} = (23).$$

Kun sovelletaan induktio-oletus joukkoon $\{2, \ldots, n\}$ nähdään, että G sisältää kaikki tämän joukon permutaatiot eli kaikki S_n:n alkiot jotka pitävät 1 paikallaan. Erityisesti kaikki vaihdot (ij), $2 \leq i$ ovat G:ssä. Toisaalta

$$(1m) = (12)(2m)(12), m > 2,$$

joten G sisältää kaikki vaihdot. Koska nämä virittävät S_n:n väite seuraa.

Ratkaisutapa 2: Jokaisella $i \in \{1, \ldots, n-2\}$ pätee

$$\tau(i\ i+1)\tau^{-1} = (i+1\ i+2).$$

Koska $(i\ i{+}1) \in G$ kun $i = 1$, induktiolla saadaan, että $(i\ i{+}1) \in G$ kaikilla $i = 1, \ldots, n-1$. Näiden yhdisteenä saadaan kaikki vaihdot, sillä jos $a < b$, niin

$$(a\ b) = (a\ a+1) \cdots (b-2\ b-1)(bb-1) \cdots (a+1\ a+2) \circ (a\ a+1).$$

Väite seuraa.

4. Määritä ryhmien S_4 ja A_4 konjugaattiluokat ja niiden koot sekä kaikki normaalit aliryhmät.

   Ratkaisu: Lauseesta 3.6 seuraa, että S_n alkiot ovat toistensa kojugaatteja, jos ja vain jos ne ovat sama syklityyppiä. Tapauksessa $n = 4$ saadaan siis konjugaattiluokat

$$C_1 = \{\mathrm{id}\}, |C_1| = 1,$$
$$C_2 = \{(12), (13), (14), (23), (24), (34)\}, |C_2| = 6,$$
$$C_3 = \{(123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\}, |C_3| = 8$$
$$C_4 = \{(1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432)\}, |C_4| = 6,$$
$$C_5 = \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}, |C_5| = 3.$$

   Olkoon H G:n normaali epätriviaali aliryhmä. Tällöin H on yhdiste konjugaatioluokista. Lisäksi se sisältää varmasti C_1:n. Koska $|G| = 24$ aliryhmän H koko on oltava 24:n tekijä. Jos H ei sisältää C_5 niin sen koko on oltava 7, 13, 9, 15 tai 21, mikä on mahdotonta. Näin ollen H sisältää ainakin joukon

$$H_1 = \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} = C_1 \cup C_5.$$

   Toisaalta helposti nähdään, että H_1 on G:n aliryhmä. Tämä seuraa siitä, että

$$(ab)(cd) \circ (ac)(bd) = (ad)(bc).$$

   Itse asiassa H_1 on isomorfinen Kleinin neliryhmän $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ kanssa. Se on normaali S_n:ssä sillä se on yhdiste konjugaatioluokista. Tarkastellaan vielä voiko H sisältää muita alkioita. Jos H_1:een lisätään C_2 tai C_4 tai molemmat saadaan 10 tai 16 alkiota, joten ei saada aliryhmää. Jos lisätään C_2 ja C_3 tai C_4 ja C_3 saadaan 18 alkiota ja sama johtopäätös. Ainoa jäjellä oleva mahdollisuus on siis unioni $H_1 \cup C_3$, jossa on 12 alkiota. Helposti nähdään, että tämä onkin parillisten permutaatioiden ryhmä A_4. Itse asiassa tiedetään jo etukäteen, että S_4:llä on ainakin yksi normaali aliryhmä A_4, jossa on 12 alkiota ja toisaalta yllä käyttiin läpi kaikki mahdollisuudet normaleille aliryhmille ja löydettiin vain yksi mahdollinen ehdokas aliryhmälle jossa 12 alkiota. Tästä seuraa että sen on pakko olla A_4, eikä tarvitse edes todistaa että se onkin aliryhmä.
   Saadaan siis kaksi epätriviaalia normaalia aliryhmä - A_4 ja H_1, joka on syklityppiä 2-2 olevien permutaatioiden virittämä aliryhmä.

   Tarkastellaan seuraavaksi konjugaatit A_4:ssä. Yllä todettiin jo että joukkona $A_4 = C_1 \cup C_3 \cup C_5$. Lauseen 3.8 nojalla alkion $\sigma \in A_4$ konjugaattiluokka A_4:ssä on joko sama kun sen kojugattiluokka S_4:ssä tai sen koko on tasan puolet vastaavasta S_4:n konjugaattiluokassa. Jälkimmäinen tapaus realisoituu jos ja vain jos σ:n syklihajotelmassa syklit ovat parittomia ja niiden koot erillisiä. A_4:n alkioista tämä ehto toteutuu C_3:n alkioille, joka siis jakautuu kahteen 4:n alkion luokaksi. Laskemalla löydetään seuraavat alkion (123) konjugaatit

$$(12)(34)(123)(12)(34) = (142),$$
$$(13)(24)(123)(13)(24) = (134),$$
$$(14)(23)(123)(14)(23) = (243).$$

Koska tiedetään, että alkion (123) konjugaattiluokan koko on 4, on löydetty kaikki sen kojugaatit. Näin ollen konjugaattiluokat ovat

$$C_1 = \{\mathrm{id}\}, |C_1| = 1,$$
$$C_{31} = \{(123), (142), (134), (243)\}, |C_{31}| = 4, \text{ja}$$
$$C_{32} = \{(132), (124), (143), (234)\}, |C_{32}| = 4$$
$$C_5 = \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}, |C_5| = 3.$$

Tarkastelemalla näiden erityyppiset yhdisteet ja vertamaalla ne A_4:n kertalukuun 12 nähdään, että $H_1 = C_1 \cup C_5$ on ainoa epätriviaali A_4:n normaali aliryhmä.

Huomautus: Myöhemmin (Lause 5.13) todistetaan, että A_n:llä ei ole triviaalia normaalia aliryhmiä kun $n \neq 4$. Tästä helposti seuraa, että S_n:n ainoa epätriviaali normaali aliryhmä on A_n, kun $n \neq 4$. Näin ollen tapaus $n = 4$ on ainoa ”poikkeus ”.

5. Todista *Cauchyn lause*: Jos G on äärellinen ryhmä, ja p on sen kertaluvun alkutekijä, niin löytyy alkio $g \in G$, jonka kertaluku on p.

   Ratkaisu: Sylowin lauseen (Lause 4.4.) nojalla G:llä on Sylowin p-aliryhmä P. Määritelmän mukaan P on epätriviaali, joten erityisesti on olemassa alkio $x \in P$, $x \neq e$. Koska P on p-ryhmä x:n kertaluku on p^k jollakin $k \in \mathbb{N}$. Olkoon

   $$y = x^{p^{k-1}}.$$

   Tällöin $y \neq e$ (muuten x:n kertaluku olisi pienempi kuin p^k), mutta $y^p = x^{p^k} = e$. Koska p on alkuluku, tästä seuraa, että y:n kertaluku on p.

6. Olkoon G äärellinen ryhmä ja S sen Sylowin p-aliryhmä. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:
   (i) $S \trianglelefteq G$.
   (ii) S on G:n ainoa Sylowin p-aliryhmä.
   (iii) Jokainen G:n p-aliryhmä sisältyy S:ään.

(iv) S on *karakteristinen* G:ssä, eli kaikilla G:n automorfismeilla θ pätee $\theta(S) = S$.

Ratkaisu: i) $\Rightarrow$ ii) Olkoon S' G:n Sylowin aliryhmä. Lauseen 4.4. nojalla S ja S' ovat toistensa kojugaatteja. Koska S on normaali on oltava $S' = S$.
ii) $\Rightarrow$ iii) K. Suomisen monisteen Lauseen 1.5.12 nojalla jokainen G:n p-aliryhmä sisältyy johonkin G:n Sylowin p-aliryhmään. Koska S on ainoa Sylowin p-aliryhmä, väite seuraa.
iii) $\Rightarrow$ iv) Olkoon $\theta\colon G \to G$ automorfismi. Tällöin $\theta(S)$ on G:n p-aliryhmä, joten se sisältyy S:ään. Toisaalta $\theta(S)$ ja S ovat äärelliset joukot, joissa on saman verran alkioita, joten $\theta(S) = S$.
iv) $\Rightarrow$ i) Sovelletaan kohdan iv) ehtoa sisäisiin homomorfismeihin $f_x(y) = xyx^{-1}$.

ä