Matematiikan laitos
AlgebraII
Harjoitus 12
15.04.2011
Ratkaisuehdotuksia
Aleksandr Pasharin

1. Olkoon $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ ja $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} \in E$. Osoita:
   (a) $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
   (b) $[E : \mathbb{Q}(\sqrt{2})] = 2$ ja $[E : \mathbb{Q}] = 4$.
   (c) $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ on E:n kanta kunnan $\mathbb{Q}$ suhteen.
   (d) $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\alpha)$ ja $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\alpha)$.

   Päättele, että $E = \mathbb{Q}(\alpha)$ ja etsi α:n minimipolynomi $\mathbb{Q}$:n suhteen.

Ratkaisu: a) Harj. 11 teht. 6a):n nojalla $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ on 2-ulotteinen $\mathbb{Q}$:n suhteen, kantana $\{1, \sqrt{2}\}$. Näin ollen jos $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ niin on olemassa $a, b \in \mathbb{Q}$ siten, että

$$\sqrt{3} = a + b\sqrt{2} \text{ eli}$$
$$\sqrt{3} - b\sqrt{2} = a.$$

Ottamalla neliö yhtälön molemmista puolista saadaan

$$3 - 2b\sqrt{6} + 2b^2 = a^2,$$

josta seuraa, että $b\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$. Tämä on mahdollista vain jos $b = 0$. Tällöin $\sqrt{3} = a \in \mathbb{Q}$, mikä ei pidä paikkansa. Näin ollen $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

b) $\sqrt{3}$ on $\mathbb{Q}(\sqrt{2})[X]$:n polynomin $X^2 - 3$ juuri, joten sen aste $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$:n suhteen on korkeintaan 2. Toisaalta a)-kohdasta seuraa, että se ei voi olla minkään $\mathbb{Q}(\sqrt{2})[X]$:n ensimmäisen asteen polynomin juuri. Näin ollen $X^2 - 3$ on $\sqrt{3}$ minimipolynomi $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$:n suhteen joten

$$[E : \mathbb{Q}(\sqrt{2})] = 2.$$

Huomaa, että käytimme myös Harj 11 teht. 2, josta seuraa, että $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3})$.
Harj. 11 teht. 6a):n nojalla $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2$. Lauseesta 12.3 seuraa, että

$$[E : \mathbb{Q}] = [E\, Q(\sqrt{2})] \cdot [\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2 \cdot 2 = 4.$$

c) Lauseen 12.3 todistus implikoi, että E:n eräs kanta $\mathbb{Q}$:n suhteen on joukko $\{ab\}$, missä a käy läpi kaikki E:n kannan $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$:n suhteen alkiot ja b käy läpi kaikki $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$:n $\mathbb{Q}$-kannan alkiot. Koska $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3})$, sen eräs kanta $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$:n suhteen on $\{1, \sqrt{3}\}$. Lisäksi tiedämme, että $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$:n eräs kanta $\mathbb{Q}$:n suhteen on $\{1, \sqrt{2}\}$. Näin ollen kanta saadaan kertomalla kaikki kahden kannan alkiot parettain, jolloin saadaan joukko $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$.

d) Huomataan, että

$$\begin{aligned} \alpha - \sqrt{2} &= \sqrt{3}, \text{ josta seuraa} \\ \alpha^2 - 2\alpha\sqrt{2} + 2 = (\alpha - \sqrt{2})^2 &= 3 \text{ eli} \\ \sqrt{2} &= (\alpha^2 - 1)/2\alpha, \end{aligned}$$

joten $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\alpha)$. Vastaavasti nähdään, että

$$\sqrt{3} = (\alpha^2 + 1)/2\alpha.$$

Näin ollen $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \subset \mathbb{Q}(\alpha)$. Toisaalta selvästi $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} \in E$, joten myös

$$\mathbb{Q}(\alpha) \subset E.$$

Näin ollen $E = \mathbb{Q}(\alpha)$. Laskemalla saadaan

$$\begin{aligned} \alpha^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 2 + 3 + 2\sqrt{6} &= 5 + 2\sqrt{6}, \text{ joten} \\ \alpha^4 - 10\alpha^2 + 25 = (\alpha^2 - 5)^2 &= 24 \text{ eli} \\ \alpha^4 - 10\alpha^2 + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Koska ylläolevan nojalla α:n aste $\mathbb{Q}$:n suhteen on 4, polynomin $X^4 - 10X^2 + 1$ täytyy olla α:n minipolynomi $\mathbb{Q}$:n suhteen.

2. Osoita, että kunnan K äärellinen laajennos on äärellisviritteinen ja algebrallinen K:n suhteen.

   Ratkaisu: Olkoon L K:n äärellinen laajennus. Olkoon $\{x_1, \dots, x_n\}$ sen kanta K-vekoriavaruutena. Tällöin selvästi $\{x_1, \dots, x_n\}$ virittää L myös K-algebrana, joten L on äärellisviritteinen. Olkoon $x \in L$. Tällöin $K[x]$ on L:n K-aliavaruus, joten se on myös äärellisulotteinen K-vektoriavaruutena. Tällöin x ei voi olla trranskendentiinen, sillä muuten $K[x] \cong K[X]$ on ääretönulotteinen. Näin ollen x on algebrallinen.

3. Oletetaan tunnetuksi luvun π transkendenttisuus rationaalilukujen suhteen. Osoita, että ympyrän neliöinti ja kuution kahdentaminen ovat harppi-viivain-konstruktioina mahdottomia.

   Ratkaisu: Olkoon annettu ympyrän keskipiste x ja ympyrän piste r, voidaan olettaa, että $x = (0, 0)$ on origo ja $r = (1, 0)$.

Ympyrän neliöinti onnistuu, jos pystytään tästä kahden pisteen geometrisesta kuviosta G_0 konstruoida harpin ja viivan avulla viiva (neliön sivu), jonka pituudelle a pätee $a^2 = \pi$ eli $a = \sqrt{\pi}$ eli on olemassa geometrinen konstruuktio kuviolle G kuviosta G_0, jolle pätee $\sqrt{\pi} \in K_G$. Lauseen 13.11 nojalla tällöin pätee

$$[K_G : \mathbb{Q}] = [K_G : K_{G_0}] = 2^n$$

jollakin $n \in \mathbb{N}$, erityisesti K_G on äärellinen $\mathbb{Q}$:n laajennus. Teht. 2 nojalla K_G on algebrallinen. Kuitenkin $\sqrt{\pi} \in K_G$, joten myös $\pi \in K_G$, joten π on algebrallinen $\mathbb{Q}$:n suhteen, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa.

Samalla tavalla nähdään, että kuution kahdentaminen onnistuu, jos pystymme konstruoimaan $\sqrt[3]{2}$ alkaen samasta kuviosta $G_0 = \{(0,0),(1,0)\}$ eli on olemassa olemassa geometrinen konstruuktio kuviolle G kuviosta G_0, jolle pätee $\sqrt[3]{2} \in K_G$. Taas Lauseesta 13.11 seuraa, että

$$[K_G : \mathbb{Q}] = [K_G : K_{G_0}] = 2^n$$

jollakin $n \in \mathbb{N}$. Lausesta 12.3 seuraa tällöin että alilajennuksen $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ aste on myös kahden potenssi. Kuitenkin alkion $\sqrt[3]{2}$ minimipolynomi $\mathbb{Q}$:n suhteen on $X^3 - 2$. Nimittäin $\sqrt[3]{2}$ on selvästi tämän polynomin juuri ja Eisensteinin kriteeristä helposti seuraa, että polynomi on jaoton. Näin ollen (Lause 13.4) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$:n aste on 3. Saadaan siis ristiriitä.

4. Olkoon K kunta. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:
   (i) K on algebrallisesti suljettu.
   (ii) Jokaisella polynomilla $f \in K[X]$, joka ei ole vakio, on juuri K:ssa.
   (iii) K:lla ei ole aitoja algebrallisia laajennoksia.
   (iv) K:lla ei ole aitoja äärellisiä laajennoksia.
   (v) Jos L on K:n laajennos, niin K koostuu täsmälleen niistä L:n alkioista, jotka ovat algebrallisia K:n suhteen.
   (vi) Jokaisen jaottoman polynomin $f \in K[X]$ aste on 1.

   Ratkaisu: (i)$\Rightarrow$(ii). Olkoon K algebrallisesti suljettu ja $f \in K[X]$ ei-vakio polynomi. Tällöin f voidaan kirjoittaa ensimmäisen asteen polynomien tulona. Erityisesti jos f ei ole vakio, niin f:llä on ensimmäisesn asteen tekijä $aX + b$. Tästä seuraa, että f:llä on ainakin juuri $-b/a$.
   (ii)$\Rightarrow$(iii). Olkoon L K:n algebrallinen laajennos ja $x \in L$. Riittää osoittaa, että $x \in K$. Olkoon $f \in K[X]$ x:n minimipolynomi. Tällöin f on jaoton. Toisaalta oletuksen nojalla f:llä on juuri $a \in K$, joten sillä on ensimmäisen asteen tekijä $X - a$.

Jaottomuuden perusteella $f = X - a$. Tällöin $x - a = f(x) = 0$, joten $x = a \in K$.
(iii)$\Rightarrow$(iv) Jokainen äärellinen laajennos on erityisesti algebrallinen (Teht. 2).
(iv)$\Rightarrow$(v) Olkoon L K:n laajennos ja $x \in L$ algebrallinen K:n suhteen. Riittää osoittaa, että $x \in K$. Lauseen 13.4 nojalla $K(x)$ on äärellinen K-laajennos. Oletuksen nojalla $K(x) = K$. Erityisesti $x \in K$.
(v)$\Rightarrow$(vi)Olkoon $f \in K[X]$ jaoton polynomi. Tällöin $\deg f > 0$ ja $L = K[X]/\langle f \rangle$ on kunta (sillä f jaoton), erityisesti K:n laajennos. Lisäksi se on äärellinen, $\dim L = \deg f$, joten erityisesti algebrallinen K:n suhteen (Teht. 2). Oletuksesta seuraa, että $L = K$, erityisesi $\deg f = \dim L = 1$.
(vi)$\Rightarrow$(i) Koska K on kunta $K[X]$ on tekijöihinjakorengas, erityisesti jokainen polynomi on jaottomien polynomien tulo. Oletuksesta seuraa, että jokaisen jaottoman polynomin aste on 1. Siis $K[X]$:n jokainen polynomi on ensimmäisen asteen polynomien tulo, joten K on algebrallisesti suljettu.

5. Olkoon E kunnan K laajennos. Osoita:
   (a) Jos A on E:n alialgebra, $a \in A$ algebrallinen K:n suhteen ja $a \neq 0$, niin $a^{-1} \in A$.
   (b) Jos $a \in E$, $a \neq 0$ ja $a^{-1} \in K[a]$, niin a on algebrallinen K:n suhteen.

   Päättele, että E on K:n algebrallinen laajennos, jos ja vain jos jokainen En ali-K-algebra on kunta.

Ratkaisu: a) A on erityisesti rengas, joka sisältää K:n. Tästä seuraa, että jos $a \in A$, niin myös $K[a] \subset A$. Toisaalta Lauseen 13.4 nojalla $K[a] = K(a)$ on kunta, sillä a algebrallinen. Erityisesti $a^{-1} \in K[a] \subset A$.

b) Oletuksesta seuraa, että on olemassa $x_0, \ldots, x_n \in K$, siten että

$$a^{-1} = x_n a^n + x_{n-1} a^{n-1} + \ldots + x_1 a + x_0, \text{ mistä seuraa, että}$$

$$x_n a^{n+1} + x_{n-1} a_n + \ldots + x_1 a^2 + x_0 a - 1 = 0.$$

Näin ollen a on algebrallinen K:n suhteen.

Jos E on K:n algebrallinen laajennos, ja A on sen ali-K-algebra, niin a) kohdan nojalla jokaisella $a \in A, a \neq 0$ pätee $a^{-1} \in A$. Näin ollen A on kunta.
Kääntäen jos jokainen E:n ali-K-algebra on kunta, niin erityisesti jokaisella $a \in E, a \neq 0$ pätee $a^{-1} \in K[a]$, sillä $K[a]$ on

K-alialgebra. b)-kohdasta seuraa, että a on algebrallinen. Koska myös $0 \in E$ on selvästi algebrallinen, E on algebrallinen laajennus.

6. Olkoon K kunta, E sen laajennos ja $a \in E$ transkendenttinen K:n suhteen. Osoita
   (a) Jos $p, q \in K[X]$, $q \neq 0$ ja $b \in E \setminus K$, niin $p - bq \neq 0$.
   (b) Jos $b \in K(a)$, mutta $b \notin K$, niin a on algebrallinen $K(b)$:n suhteen.
   (c) K on algebrallisesti suljettu laajennoksessa $K(a)$, eli jokainen K:n suhteen algebrallinen $K(a)$:n alkio on K:ssa ($K(a)$ on K:n *puhtaasti transkendenttinen* laajennos).

Ratkaisu: a) Jos $p - bq = 0$, niin erityisesti $p_n = bq_n$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Eritysesi jos valitaan n siten, että $q_n \neq 0$, saadaan

$$b = p_n/q_n \in K, \text{ sillä } K \text{ on kunta.}$$

Tämä on vastoin oletusta.

b) Oletetaan, että

$$b \in K(a) = \{\frac{p(a)}{q(a)} : p, q \in K[X], q(a) \neq 0.\}$$

Tällöin on olemassa $p, q \in K[X]$, siten, että $q(a) \neq 0$ ja $b = \frac{p(a)}{q(a)}$, joten a on polynomin $p - bq \in K(b)[X]$ juuri. a)-kohdan nojalla tämä ei ole nollapolynomi. Näin ollen a on algebrallinen $K(b)$:n suhteen.

c) Olkoon $b \in K(a) \setminus K$. Jos b olisi algebrallinen K:n suhteen, niin pätisi $[K(b) : K] < \infty$. b)-kohdan nojalla a on algebrallinen $K(b)$:n suhteen, joten $[K(a) : K(b)] < \infty$. Lauseesta 13.11 seuraa, että

$$[K(a) : K] = [K(a) : K(b)] \cdot [K(b) : K] < \infty.$$

Siis $K(a)$ on äärellinen laajennus, joten se on erityisesti algebrallinen (Teht. 2). Tämä on ristiriidassa oletuksen kanssa.
Näin ollen b ei ole algebrallinen K:n suhteen, joten K on algebrallisesti suljettu $K(a)$:ssä.