Matematiikan laitos
AlgebraII
Harjoitus 1
21.01.2011
Ratkaisuehdotuksia
Aleksandr Pasharin

1. Olkoon A joukko ja B sen osajoukko ($B \neq \emptyset, A$). Olkoon $E = \mathcal{P}(A)$ laskutoimituksella

$$\text{a) } (X, Y) \mapsto X \cap Y \text{ tai b) } (X, Y) \mapsto X \cup Y$$

varustettu monoidi. Tutki, onko
(a) $F = \mathcal{P}(B)$ monoidin E alimonoidi,
(b) $X \mapsto X \cup B$ monoidihomomorfismi $E \to E$,
(c) $X \mapsto X \cap B$ monoidihomomorfismi $E \to E$ tai $E \to F$.

Ratkaisu: Osajoukko F on kyllä vakaa molempien laskutoimitusten suhteen, sillä jos $X, Y \subset B$, niin myös $X \cap Y, X \cup Y \subset B$. Kuitenkin F ei sisällä laskutoimutuksen $\cap$ neutraalialkiota A. Näin ollen F ei ole monoidin $(\mathcal{P}(A), \cap)$ alimonoidi. Huomaa, että laskutoimituksella $\cap$ varustettuna se on kuitenkin monoidi, neutraalialkiona B.
Sen sijaan laskutoimituksen $\cup$ neutraaliakio $\emptyset$ on joukossa F, joten F on monoidin $(\mathcal{P}(A), \cup)$ alimonoidi.

Palautetaan mieleen yhdisteen ja leikkauksen osittelulait. Kaikille joukoille A, B, C pätee

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C),$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

Näistä helposti seuraa, että kuvaukset $f = (X \mapsto X \cup B)$ ja $g = (X \mapsto X \cap B)$ säilyttävät molemmat laskutoimitukset $\cap$ ja $\cup$. Tarkistetaan tämä laskutoimituksen $\cap$ tapauksessa (tapaus $\cup$ menee samalla tavalla). Olkoot $X, Y \subset A$. Tällöin

$$f(X \cap Y) = (X \cap Y) \cup B = (X \cup B) \cap (Y \cup B) = f(X) \cap f(B),$$

$$g(X \cap Y) = (X \cap Y) \cap B = (X \cap B) \cap (Y \cap B).$$

Lisäksi $f(A) = A \cup B = A$, joten $f\colon (E, \cap) \to (E, \cap)$ on monoidihomomorfismi. Toisaalta $f(\emptyset) = B$ joten f ei kuvaa $(E, \cup)$:n neutraalialkio itselleen. Näin ollen $f\colon (E, \cup) \to (E, \cup)$ ei ole monoidihomomorfismi.

Kuvaus g kuvaa jokaisen E:n alkion F:n alkioksi, joten se voidaan ajatella kuvauksena $E \to E$ tai kuvauksena $E \to F$. Yllä

on jo huomautettu, että g säilyttää E:n molemmat laskutoimitukset. Tarkistetaan vielä miten käy neutraalialkioille.
$g(X) = B$ ei ole $(E, \cap)$:n neutraalialkio, mutta se on $(F, \cap)$:n neutraalialkio. Näin ollen $g\colon E \to E$ ei ole monoidihomomorfismi, mutta $g\colon E \to F$ on monoidihomomorfismi.
$g(\emptyset) = \emptyset$, joten g on monoidihomormofismi sekä kuvauksena $g\colon E \to E$, että kuvauksena $g\colon E \to F$.

2. Olkoon $(M, \circ)$ monoidi. Alkio $x \in M$ on
   - *vasemmalta kääntyvä*, jos on olemassa $y \in M$, jolla $y \circ x = e$,
   - *oikealta kääntyvä*, jos on olemassa $y \in M$, jolla $x \circ y = e$,
   - *kääntyvä*, jos on olemassa $y \in M$, jolla $x \circ y = e = y \circ x$.

   a) Osoita, että monoidin alkio on kääntyvä, jos ja vain jos se on vasemmalta ja oikealta kääntyvä.

   b) Osoita, että äärellisen monoidin alkio on kääntyvä, jos ja vain jos se on vasemmalta tai oikealta kääntyvä. (Vihje: Jos x on tarkasteltava alkio, tarkastele kuvauksia $y \mapsto x \circ y$ ja $y \mapsto y \circ x$.)

Ratkaisu: a) Olkoon $x \in M$. Jos x on kääntyvä niin sen käänteisalkio y on selvästi sekä vasen käänteisalkio että oikea käänteisalkio.
Kääntäen oletetaan, että on olemassa $y, z \in M$ joille $y \circ x = e = x \circ z$. Tällöin

$$y = y \circ e = y \circ (x \circ z) = (y \circ x) \circ z = e \circ z = z.$$

Näin ollen $y = z$ on x:n käänteisalkio.

b) Oletetaan, että x on vasemmalta kääntyvä ja olkoon $z \in M$ sellainen, että $z \circ x = e$. Tarkastellaan kuvaus $f\colon M \to M$, $f(y) = x \circ y$. Tämä kuvaus on injektio, sillä jos $f(y) = x \circ y = x \circ y' = f(y')$, niin kertomalla tämä yhtälö vasemmalta z:llä saadaan $y = y'$. Koska Mon äärellinen joukko mikä tahansa injektio $M \to M$ on myös surjektio. Erityisesti f on surjektio. Löytyy siis $y \in M$ jolle $f(y) = x \circ y = e$. Näin ollen x on myös oikealta kääntyvä. Kohdasta a) seuraa, että x on kääntyvä.
Tapaus ”x on oikealta kääntyvä”käsitellään samalla tavalla. Vaihtoehtoisesti voi tarkastella M:n vasta-monoidia $(M, \circ')$, jossa laskutoimitus $\circ'$ on määritelty kaavalla

$$x \circ' y = y \circ x.$$

Tässä monoidissa oikealta kääntyvä alkio on sama kuin $(M, \circ)$:n vasemmalta kääntyvä alkio ja toisinpäin, joten tulos seuraa jo todistetusta tapauksesta.

3. Tarkastellaan jäännösluokkarengasta $\mathbb{Z}_{10} = \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, alkioina jäännösluokat $\bar{n}$ modulo 10 ja laskutoimituksina tavanomaiset jäännösluokkien yhteen- ja kertolaskut. Osoita, että osajoukko $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\} \subset \mathbb{Z}_{10}$ on rengas, muttei renkaan $\mathbb{Z}_{10}$ alirengas. Mikä on osajoukon $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$ virittämä alirengas?

   Ratkaisu: Merkitään $X = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$. Helposti nähdään, että $X = \{2\bar{n}_{10} : n \in \mathbb{Z}\}$. Joukko X on suljettu yhteen- ja kertolaskun suhteen, sillä

$$2\bar{n} + 2\bar{m} = 2(\overline{n+m}),$$

$$2\bar{n} \cdot 2\bar{m} = 4(\overline{n \cdot m}) = 2(\overline{2nm}).$$

   Lisäksi $\bar{0} \in X$ ja X:n alkion $2\bar{n}$ vasta-alkio $-2\bar{n} = 2(\overline{-n})$ on myös X:n alkio. Laskutoimitusten sellaiset ominaisuudet kuin liittännäisyys, vaihdannaisuus ja osittelulait periytyvät automattisesti $\mathbb{Z}_{10}$:n vastaavista ominaisuuksista. Lisäksi kaikilla $n \in \mathbb{Z}$ pätee

$$\bar{6} \cdot \overline{2n} = \overline{12n} = \overline{2n},$$

   joten $\bar{6}$ on X:ssä kertolaskun neutraalialkio. Näin ollen X on (ykkösellinen) rengas. Se ei kuitenkaan ole $\mathbb{Z}_{10}$:n alirengas, sillä $\mathbb{Z}_{10}$:n kertolaskun neutraalialkio $\bar{1}$ ei ole joukossa X.

   $\mathbb{Z}_{10}$ mielivaltaisen alirenkaan Y on sisältävä kertolaskun neutraalialkion $\bar{1}$ ja siis myöskin kaikki sen monikerrat $n \cdot \bar{1} = \bar{n}$, $n \in \mathbb{Z}$. Näin ollen $Y = \mathbb{Z}_{10}$ on itsensä ainoa alirengas. Erityisesti X:n virittämä alirengas on koko rengas $\mathbb{Z}_{10}$.

4. Olkoot $m, n \in \mathbb{N}$ ja $m \geq 1$. Olkoon $R_{m,n}$ $\mathbb{N}$:n ekvivalenssirelaatio

$$x = y \text{ tai } (x \geq n \text{ ja } y \geq n \text{ ja } m | x - y).$$

   Osoita, että additiivisen monoidin $\mathbb{N}$ yhteenlasku ja ekvivalenssirelaatio $R_{m,n}$ ovat yhteensopivat ja kuvaile tekijämonoidia $\mathbb{N}/R$.

   Ratkaisu: Merkitään $R_{m,n} = R$. Oletetaan, että xRy ja $x'Ry'$ ja osoitetaan, että $x + x'Ry + y'$. Jos molemmat relaatiot ovat triviaaleja eli $x = y$, $x' = y'$ niin väite on selvä. Oletetaan, että ainakin toinen relaatiosta on epätriviaali. Tällöin $x + x' \geq n$ ja $y + y' \geq n$. Lisäksi joka tapauksessa $m|x - y$ ja $m|x' - y'$ (triviaalin relaation tapauksessa tämä pätee trivialisti). Näin ollen $(x + x') - (y + y') = (x - y) + (x' - y')$ on jaollinen m:llä. Väite on todistettu.

Alkion $x \in \mathbb{N}$ ekvivalenssiluokka on yksiö $\{x\}$, jos $x \in \{1, \ldots, n-1\}$ tai joukko

$$\{x + m \cdot y : y \in \mathbb{Z}\} \cap \{x \in \mathbb{N} : x \geq n\}$$

jos $x \geq n$. Näille voidaan valita esim. edustajat $n, n+1, \ldots, n+m-1$. Voidaan siis ajatella, että tekijämonoidi $\mathbb{N}/R$ on äärellinen joukko, jonka alkiot ovat $0, \ldots, n+m-1$. Laskutoimitus $+'$ on määritelty seuraavasti. Olkoot $x, y \in 0, \ldots, n+m-1$. Jos $x + y < n + m$ niin

$$x +' y = x + y.$$

Muuten valitaan $k \geq 1$ jolle $n + m \cdot k \leq x + y < n + m \cdot (k+1)$, jolloin

$$x +' y = x + y - m \cdot k.$$

Neutraalialkio on luonnollisesti luku 0. Jos $n > 0$ se on myös ainoa kääntyvä alkio. Jos taas $n = 0$ ei ole vaikeata nähdä, että $\mathbb{N}/R$ on isomorfinen ryhmän $(Z_m, +)$ kanssa.

Huomautus: Kääntäen voidaan osoittaa, että mikä tahansa $\mathbb{N}$:n epätriviaali relaatio joka on yhteensopiva yhteenlaskun kanssa on relaatio $R_{n,m}$ joillakin (yksikäsitteisillä) $n \in \mathbb{N}, m \geq 1$.

5. Olkoot G, H_1 ja H_2 ryhmiä ja $f_i : G \to H_i$ $(i = 1, 2)$ ryhmähomomorfismeja, joilla $\mathrm{Ker}(f_1) \subseteq \mathrm{Ker}(f_2)$. Osoita, että on oleamssa tasan yksi ehdon $f_2 = f \circ f_1$ täyttävä ryhmähomomorfismi $f : \mathrm{Im}(f_1) \to H_2$ ja että tällöin $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f_2)$ ja $\mathrm{Ker}(f) = f_1(\mathrm{Ker}(f_2))$.

Ratkaisu:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[d, "f_1"] \arrow[dr, "f_2"] & \\
\mathrm{Im}(f_1) \arrow[r, dotted, "f"] \arrow[d, hook] & H_2 \\
H_1 &
\end{tikzcd}$$

Yksikäsitteisyys on selvä - jos $y \in \mathrm{Im}(f_1)$, niin $y = f_1(x)$ jollakin $x \in G$ ja $f(y) = f \circ f_1(x) = f_2(x)$ on yksikäsitteisesti määrätty. Tämä myös osoittaa, että f on määriteltävä seuraavasti - valitaan $x \in G$ jolla $y = f_1(x)$ ja asetetaan $f(y) = f_2(x)$. Täytyy vain osoittaa vielä, että tulos ei riippu x:n valinnasta. Olkoon $x' \in G$ toinen alkio jolle $f_1(x') = y$. Tällöin $f_1(x^{-1}x') = e$, eli $x^{-1}x' \in \mathrm{Ker}(f_1) \subseteq \mathrm{Ker}(f_2)$, joten $f_2(x^{-1}x') = e$. Tästä taas seuraa, että $f_2(x) = f_2(x')$. Näin ollen x:n valinta ei vaikuta

$f(y)$:n arvoon. Näin saadaan siis kuvaus $f\colon \operatorname{Im}(f_1) \to H_2$. Osoitetaan, että se on homomorfismi. Olkoot $y = f_1(x), y' = f_1(x')$. Tällöin $f_1(xx') = yy'$, joten

$$f(yy') = f_2(xx') = f_2(x)f_2(x') = f(y)f(y').$$

Jos $z = f_2(x)$, niin $z = f(f_1(x))$. Kääntäen jos $z = f(y)$ jollakin $y \in \operatorname{Im}(f_1)$, niin $y = f_1(x)$ jollakin $x \in G$, joten $z = f(f_1(x)) = f_2(x)$. Näin ollen

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f_2).$$

Olkoon $y \in \operatorname{Ker} f$ eli $f(y) = e$. Tällöin $f_2(x) = e$ jollakin x jolle pätee $f_1(x) = y$. Näin ollen $x \in \operatorname{Ker}(f_2)$ ja $y \in f_1(\operatorname{Ker}(f_2))$. Kääntäen olkoon $f_2(x) = e$. Tällöin $f(f_1(x)) = f_2(x) = e$, joten $f_1(x) \in \operatorname{Ker}(f)$. Pätee siis

$$\operatorname{Ker}(f) = f_1(\operatorname{Ker}(f_2)).$$

Huomautus: Koska isomorfialauseen (Lause 1.15) nojalla $\operatorname{Im}(f_1)$ on isomorfinen tekijäryhmän $G/\operatorname{Ker}(f_1)$ kanssa tehtävän väite voidaan myös johtaa Lauseesta 1.14. Itse asiassa se on vain toinen tapa muotoilla Lauseen 1.14 väitteen.

6. Olkoon H ryhmän G aliryhmä. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:
   (i) H on G:n normaali aliryhmä.
   (ii) Kaikilla $x, y \in G$, jos $xH = yH$ niin $x^{-1}H = y^{-1}H$.
   Päättele ylläolevasta, että jos H:n indeksi $[G : H] = 2$, niin H on G:n normaali aliryhmä.

   Ratkaisu: Oletetaan, että H on normaali. Olkoot $x, y \in G$ ja $xH = yH$. Koska H on normaali toisaalta pätee $xH = Hx$ ja $yH = Hy$. Tästä saadaan

$$Hx = Hy,$$

josta siirtymällä käänteisalkioihin saadaan

$$x^{-1}H = (Hx)^{-1} = (Hy)^{-1} = y^{-1}H$$

(muista, että $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ ja $H^{-1} = H$ koska H on aliryhmä).

Oletetaan, että ehto (ii) on voimassa. Olkoot $x \in G, h \in H$. Tällöin $xh^{-1}H = xH$, joten ehto (ii) implikoi, että

$$hx^{-1}H = x^{-1}H.$$

Erityisesti tästä seuraa, että $hx^{-1} \in x^{-1}H$ eli $xhx^{-1} \in H$. Koska tämä pätee kaikilla $h \in H$ saadaan siis

$$xHx^{-1} \subset H,$$

josta seuraa, että H on normaali.

Olkoon H:n indeksi 2. Tällöin on siis olemassa vain kaksi vasenta sivuluokkaa - H itse ja xH jollakin $x \notin H$. Tästä seuraa, että ehto $xH = yH$ voidaan lausua myös muodossa "$x \in H$ jos ja vain jos $y \in H$". Koska H on suljettu käänteisalkioiden suhteen tästä ehdosta seuraa ehto "$x^{-1} \in H$ jos ja vain jos $y^{-1} \in H$. Tämä taas tarkoittaa sitä, että $x^{-1}H = y^{-1}H$. Yllätodistetun nojalla H on normaali.

Huomautus: Tarkastellaan H:n määritelemää ekvivalenssirelaatiota $\sim_H$, joka on määritelty ehdolla $x \sim_H y$ jos ja vain jos $x^{-1}y \in H$. Tämän relaation ekvivalenssiluokat ovat vasemmat sivuluokat xH. Voidaan osoittaa, että H on normaali jos ja vain jos relaatio $\sim_H$ on yhteensopiva G:n kertolaskun kanssa. Vielä yleisemmin G:n ekvivalenssirelaatio $\sim$ on yhteensopiva kertolaskun kanssa (jolloin tekijäjoukkoon voidaan siirtää laskutoimitus) jos ja vain jos $\sim = \sim_H$ jollakin normaalilla aliryhmällä H, jolloin tekijäryhmä on G/H (Lause 1.13).
Tehtävän väite voidaan siis muotoilla muodossa "H on normaali jos ja vain jos $\sim_H$ saäilyttää käänteisalkiot eli $x \sim_H y$ implikoi $x^{-1} \sim_H y^{-1}$".