

Äärimmäisten ilmiöiden teoriaa, lisätehtävät 4

1. Selvitettävä, kuuluuko kertymäfunktio F tyyppiin I, II tai III vaikutuspiiriin maksimin suhteen, kun

$$F(x) = p(1 - e^{-\mu_1 x}) + (1 - p)(1 - e^{-\mu_2 x}),$$

kun $x \geq 0$, missä $p \in (0, 1)$ ja $\mu_1, \mu_2 > 0$ ovat vakioita.

2. Olkoon muuttujan X_i kertymäfunktion häntä \bar{F}_i säännöllisesti vaihteleva indeksillä $-\alpha$, $i = 1, 2$, missä $\alpha > 0$. Oletetaan lisäksi, että X_1 ja X_2 ovat positiivisia ja toisistaan riippumattomia. Osoita, että myös summan $X_1 + X_2$ oikea häntä on säännöllisesti vaihteleva indeksillä $-\alpha$.

3. Olkoot X, X_1, X_2, \dots riippumattomia F -jakautuneita ei-negatiivisia satunnaismuuttujia, $S_n = X_1 + \dots + X_n$ ja $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. Olkoon lisäksi μ X :n odotusarvo sekä $a > \mu$ ja $b \in (0, a - \mu)$. Oletetaan, että $\bar{F} \in R_{-\alpha}$, missä $\alpha > 1$. Osoita, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_n + M_n > n(a + b) \mid S_n > na) = 1.$$