Äärimmäisten ilmiöiden teoriaa, lisätehtävät 3

1. Selvitettävä, kuuluuuko kertymäfunktio F tyypin I, II tai III vaikutuspiiriin maksimin suhteen, kun

a) $F(x) = 1 - e^{1/x}$, kun $x < 0$, $F(x) = 1$, kun $x \geq 0$.

b) $F(x) = e^{-1/x}$, kun $x > 0$, $F(x) = 0$, kun $x \leq 0$.

Myönteisessä tapauksessa on etsittävä myös normeerausjonot (a_n) ja (b_n).

2. Olkoot X_1 ja X_2 riippumattomia ei-negatiivisia F-jakautuneita satunnaismuuttujia. Oletetaan, että $\overline{F}(x) > 0$ kaikilla $x > 0$. Olkoon

$$f(y) = \limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}, \ \ y > 0.$$

a) Oletetaan, että $f(y) = 1$, $\forall y > 0$. Olkoon $L : (0, \infty) \to (0, \infty)$,

$$L(x) = \overline{F}(\log x).$$

Osoita, että L on hitaasti vaihteleva.

b) Oletetaan, että $f(y) > 1$ jollain $y > 0$. Osoita, että

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\mathbb{P}(X_1 + X_2 > x)}{2\overline{F}(x)} > 1.$$

3. Olkoot $X, X_1, X_2, \ldots$ riippumattomia ja samoin jakautuneita ei-negatiivisia satunnaismuuttujia. Olkoon c X:n kumulantit generoiva funktio ja μ odotusarvo. Oletetaan, että c on äärellinen kaikkialla.

Olkoot $a_1, a_2, \ldots$ ei-negatiivisia reaalilukuja ja $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in (1, \infty)$. Määritellään satunnaismuuttujat $Y_1, Y_2, \ldots$ ehdosta

$$Y_n = a_1X_1 + \cdots + a_nX_n, \ \ n = 1, 2, \ldots.$$

Osoita, että $\forall\varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y_n/n \in B(a\mu, \varepsilon)) = 1$.

Päteekö sama tulos, jos Y_n määritellään ehdosta

$$Y_n = a_1X_1 + \cdots + a_{n-1}X_{n-1} + X_n.$$