Äärimmäisten ilmiöiden teoriaa, lisätehtävät 2

1. Selvitettävä, kuuluuuko kertymäfunktio F tyypin I, II tai III vaikutuspiiriin maksimin suhteen, kun

a) $F'(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

b) $F'(x) = \frac{2}{\pi(1+x^2)}$, kun $x \leq 0$ ja $F(0) = 1$.

2. Olkoot Y_1 ja Y_2 riippumattomia ei-negatiivisia satunnaismuuttujia. Oletetaan, että Y_1 on kevythäntäinen ja että Y_2:n häntä on hitaasti vaihteleva indeksillä $\alpha \in (0, \infty)$. Osoita, että

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\mathbb{P}(Y_1 + Y_2 > x)}{\mathbb{P}(Y_2 > x)} = 1.$$

3. Olkoot $X, X_1, X_2, \ldots$ riippumattomia ja samoin jakautuneita ei-negatiivisia satunnaismuuttujia. Olkoon c X:n kumulantit generoiva funktio ja μ odotusarvo. Oletetaan, että c on äärellinen kaikkialla.

Olkoon $a \in (0, 1)$ vakio. Määritellään jono $\{P_n\}$ ehdoista $P_0 = 0$ ja

$$P_n = aX_n + (1-a)P_{n-1}, \ \ n = 1, 2, \ldots.$$

Osoita, että $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\frac{P_1 + \cdots + P_n}{n} \in B(\mu, \varepsilon) \right) = 1.$$