**Äärimmäisten ilmiöiden teoriaa, lisätehtävät 1**

1. Olkoon $F$ kertymäfunktio. Oletetaan, että $F(x) < 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja että $F$ kuuluu jakauman $H$ vaikutuspiiriin maksimin suhteen. Olkoon $G$ sellainen kertymäfunktio, että

$$\lim_{x\to\infty} \overline{G}(x)/\overline{F}(x) = 1.$$

Osoita, että myös $G$ kuuluu jakauman $H$ vaikutuspiiriin maksimin suhteen.

2. Olkoon $X$ mielivaltainen ei-negatiivinen satunnaismuuttuja. Merkitään

$$\overline{s} = \sup\{s \geq 0 \mid \mathbb{E}(e^{sX}) < \infty\} \in [0, \infty].$$

Olkoon

$$\overline{u} = -\limsup_{x\to\infty} x^{-1} \log \mathbb{P}(X > x),$$

missä sovitaan, että $\overline{u} = +\infty$, jos $\mathbb{P}(X > x) = 0$ jollain $x \geq 0$.

a) Osoita, että $\overline{u} \geq \overline{s}$.

b) Voidaan osoittaa, että $\overline{u} = \overline{s}$ (perusteluja ei tarvitse esittää). Olkoon lisäksi $X$:n oikea häntä säännöllisesti vaihteleva indeksillä $-\alpha$, missä $\alpha > 0$. Määrää

$$\limsup_{x\to\infty} x^{-1} \log \mathbb{P}(\log X > x).$$

3. Olkoot $X_1, X_2, \ldots$ riippumattomia satunnaismuuttujia. Oletetaan, että $X_i$:llä on eksponenttijakauma parametrina $\mu_i, i = 1, 2, \ldots$ (tiheysfunktio $\mu_i e^{-\mu_i x}$ alueessa $x > 0$). Oletetaan lisäksi, että $\mu_i \in (0, \mu)$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$, missä $\mu \in (0, \infty)$ on vakio. Olkoon $Y_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

a) Osoita, että kaikilla $s \leq 0$,

$$n^{-1} \log \mathbb{E}(e^{sY_n}) \leq \log \frac{\mu}{\mu - s}.$$

b) Osoita, että mielivaltaisella $x > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y_n \leq x) = 0.$$