Äärimmäisten ilmiöiden teoriaa, laskuharjoitus 5, 9.5.2011

Tehtävissä 2-5 $X, X_1, X_2, \ldots$ ovat riippumattomia F-jakautuneita ei-negatiivisia satunnaismuuttujia, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ ja $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$. Lisäksi μ on X:n odotusarvo.

1. Oletetaan, että $X_1, X_2, \ldots$ ovat riippumatomia Poisson-jakautuneita satunnaismuuttujia. Olkoon λ_i muuttujan X_i odotusarvo. Oletetaan, että $\lambda_i \to \lambda$, kun $i \to \infty$, missä $\lambda \in (0, \infty)$. Olkoon $Y_n = X_1 + \cdots + X_n$. Osoita, että $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y_n/n \in B(\lambda, \varepsilon)) = 1$.

2. Oletetaan, että $\overline{F} \in R_{-\alpha}$, missä $\alpha > 1$. Olkoon $a > \mu$ kiinteä. Osoita, että $\forall x > 0$, on olemassa raja-arvo

$$\overline{G}(x) \doteq \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n > n(a+x) \,|\, S_n > na).$$

Osoita lisäksi, että $\overline{G} \in R_{-\alpha}$.

3. Olkoon F kuten edellisessä tehtävässä ja $x > 1$ kiinteä. Osoita, että

$$\liminf_{n\to\infty} (\log n)^{-1} \log \mathbb{P}(S_n > n^x) \geq 1 - \alpha x.$$

4. Olkoon $a > \mu$ ja $b \in (0, a-\mu)$. Oletetaan, että $\overline{F} \in R_{-\alpha}$, missä $\alpha > 1$. Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(M_n > nb \,|\, S_n > na) = 1.$$

5. Olkoon $a > \mu$ ja $b \in (0, a-\mu)$. Oletetaan, että X on kevythäntäinen ja että $c'(s_a) = a$ eräälle $s_a > 0$ (c on X:n kumulantit generoiva funktio). Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(M_n > nb \,|\, S_n > na) = 0.$$