Äärimmäisten ilmiöiden teoriaa, laskuharjoitus 4, 2.5.2011

Huom. Viimeinen luento on 5.5, viimeiset harjoitukset ovat 9.5.

1. Olkoot X ja Y riippumattomia ei-negatiivisia satunnaismuuttujia. Osoita, että

a) $X+Y$ on paksuhäntäinen, jos joko X tai Y on paksuhäntäinen,

b) $X+Y$ on kevythäntäinen, jos sekä X että Y ovat kevythäntäisiä.

2. Olkoot Y_1 ja Y_2 riippumattomia ei-negatiivisia satunnaismuuttujia ja F_i muuttujan Y_i kertymäfunktio, $i = 1, 2$. Oletetaan, että $\overline{F}_i \in R_{-\alpha_i}$, $i = 1, 2$, missä $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$. Osoita, että

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathbb{P}(Y_1 + Y_2 > x)}{\mathbb{P}(Y_2 > x)} = 1.$$

3. Olkoot $X, X_1, X_2, \ldots$ riippumattomia ja samoin jakautuneita ei-negatiivisia satunnaismuuttujia. Olkoon F yhteinen kertymäfunktio ja $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Oletetaan, että X on kevythäntäinen ja että $\overline{F}(x) > 0, \forall x$. Osoita, että kiinteällä $n \geq 2$,

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\mathbb{P}(S_n > x)}{n\overline{F}(x)} > 1.$$

4. Olkoot $X, X_1, X_2, \ldots$ riippumattomia ja samoin jakautuneita ei-negatiivisia satunnaismuuttujia. Olkoon F yhteinen kertymäfunktio ja $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$, $n = 1, 2, \ldots$. Olkoon $\overline{F}$ säännöllisesti vaihteleva indeksillä $-\alpha$, missä $\alpha \geq 0$. Osoita, että kiinteällä $n \geq 2$ muuttujan M_n häntä on myös säännöllisesti vaihteleva indeksillä $-\alpha$.

5. Olkoon X mielivaltainen ei-negatiivinen satunnaismuuttuja ja F X:n kertymäfunktio. Merkitään

$$\overline{s} = \sup\{s \geq 0 \mid \mathbb{E}(X^s) < \infty\} \in [0, \infty].$$

Olkoon

$$\overline{u} = -\limsup_{x\to\infty} (\log x)^{-1} \log \mathbb{P}(X > x),$$

missä sovitaan, että $\overline{u} = +\infty$, jos $\mathbb{P}(X > x) = 0$ jollain $x \geq 0$. Oletetaan tunnetuksi, että $\overline{u} = \overline{s}$.

Oleteaan, että $\overline{F}$ on säännöllisesti vaihteleva indeksillä $-\alpha$, missä $\alpha > 0$. Olkoot X_1 ja X_2 riippumattomia ja samoin jakautuneita kuin X. Osoita, että

$$\lim_{x\to\infty} (\log x)^{-1} \log \mathbb{P}(X_1 X_2 > x) = -\alpha.$$