Äärimmäisten ilmiöiden teoriaa, laskuharjoitus 3, 4.4.2011

Tehtävissä 1-3 on selvitettävä, kuuluuko annettu kertymäfunktio F tyypin I, II tai III vaikutuspiiriin maksimin suhteen. Myönteisessä tapauksessa on etsittävä myös normeerausjonot (a_n) ja (b_n).

1. $F(x) = 1 - e^{1/x}$, kun $x < 0$, $F(x) = 1$, kun $x \geq 0$.

2. Cauchyn jakauma:
$$F'(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

3. Beta-jakauma:
$$F'(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(a+b)x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}, & x \in (0,1) \\ 0 \quad \text{muuten}, \end{cases} \tag{0.1}$$

missä a ja b ovat positiivisia vakioita.

4. Olkoon F kertymäfunktio ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aidosti positiivinen funktio. Olkoon
$$\kappa_n = \inf\{x \mid \bar{F}(x) \leq 1/n\}.$$

Oletetaan, että $x_F = \infty$ ja että
$$\lim_{t\to\infty} \frac{\bar{F}(t + xg(t))}{\bar{F}(t)} = e^{-x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Osoita, että $\lim_{n\to\infty} \bar{F}(\kappa_n)/\bar{F}(\kappa_n-) = 1$.

5. (jatkoa) Osoita, että
$$\lim_{n\to\infty} F^n(\kappa_n + g(\kappa_n)x) = e^{-e^{-x}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$