Äärimmäisten ilmiöiden teoriaa, laskuharjoitus 2, 21.3.2011

1. Olkoot $X_1, X_2, \ldots$ riippumattomia eksponenttijakautuneita satunnaismuuttujia odotusarvona $\mu = 1$ ja $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Määrää sellaiset x_1 ja x_2, että

$$\mathbb{P}(M_n \in (x_1, x_2)) = 0.9 \text{ ja } \mathbb{P}(M_n \le x_1) = \mathbb{P}(M_n \ge x_2),$$

kun $n = 10, 100, 1000$.

2. (jatkoa) Määrää vastaavat likimääräiset luottamusvälit käyttäen approksimaatiota

$$\mathbb{P}(M_n \le x + \log n) \sim e^{-e^{-x}}.$$

3. Olkoon F kertymäfunktio. Oletetaan, että $F(x) < 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja että F kuuluu jakauman H vaikutuspiiriin maksimin suhteen. Olkoon G sellainen kertymäfunktio, että

$$\lim_{x \to \infty} \overline{G}(x)/\overline{F}(x) = 1.$$

Osoita, että myös G kuuluu jakauman H vaikutuspiiriin maksimin suhteen.

4. Olkoon $\alpha > 0$ vakio ja

$$G(x) = \begin{cases} e^{-(-x)^\alpha}, \text{ jos } x \le 0 \\ 1, \text{ jos } x > 0 \end{cases} \tag{0.1}$$

(Weibull-jakauma). Osoita, että G on maksimin suhteen stabiili.

5. Olkoon $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ vähenevä funktio, joka toteuttaa ehdon

$$\lim_{t \to \infty} f(tx)/f(t) = \psi(x), \ \forall x > 0,$$

missä $\psi(x) \in (0, \infty)$ kaikilla $x > 0$. Osoita, että f on säännöllisesti vaihteleva.

Vihje: todista ensin, että $\psi(x_1 x_2) = \psi(x_1)\psi(x_2)$ kaikilla $x_1, x_2 > 0$.