

## Äärimmäisten ilmiöiden teoriaa, laskuharjoitus 1, 28.2.2011

1. Funktiota  $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  sanotaan *hitaasti vaihtelevaksi*, jos kaikilla  $x > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(tx)/f(t) = 1$$

ja *säännöllisesti vaihtelevaksi indeksillä*  $\alpha \in (-\infty, \infty)$ , jos kaikilla  $x > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(tx)/f(t) = x^\alpha.$$

Osoita, että

$$f(x) = \log(x + 1)$$

määrittelee hitaasti vaihtelevan funktion ja että

$$f : f(x) = \sin x + 2$$

ei ole säännöllisesti vaihteleva millään indeksillä.

2. Olkoon  $F$  kertymäfunktio ja  $\bar{F}$  säännöllisesti vaihteleva indeksillä  $\alpha$ . Osoita, että  $\alpha \leq 0$ . Esitä esimerkki kertymäfunktioista, jonka häntä  $\bar{F}$  on hitaasti vaihteleva.

3. Olkoon  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  kaikkialla derivoituva ja  $\lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) = 0$ . Osoita, että

$$f : f(x) = e^{g(\log x)}$$

on hitaasti vaihteleva.

4. (jatkoa) Olkoon

$$f(x) = e^{(\log x)^{1/3} \cos((\log x)^{1/3})}, \quad x > 0.$$

Osoita, että  $f$  on hitaasti vaihteleva ja että,  $\forall x_0 > 0$ ,  $\inf_{x \geq x_0} f(x) = 0$  ja  $\sup_{x \geq x_0} f(x) = +\infty$ .

5. Olkoot  $F$  ja  $G$  ei-degeneroituneita kertymäfunktioita sekä  $a_1, a_2, \dots$  positiivisia ja  $b_1, b_2, \dots$  mielivaltaisia reaalilukuja. Oletetaan, että  $F^n(a_n x + b_n) \xrightarrow{d} G(x)$ , kun  $n \rightarrow \infty$ . Osoita, että  $a_n/a_{n+1} \rightarrow 1$ , kun  $n \rightarrow \infty$ .