Topologia I
Harjoitus 4, ratkaisuja
Antti Perälä

1. (2:12) Olkoon $E = raj([0,1],\mathbb{R})$ varustettuna supnormilla. Määritä $d(A)$, kun $A = \{f_n : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f_n(x) = x^n, n \in \mathbb{N}\}$.

Ohje. Piirrä kuvaajia. Mikä on $\lim_{n\to\infty}(x - x^n)$, kun $0 \le x < 1$?

RATKAISU: Koska kaikilla $f \in A$ ja $x \in [0,1]$ selvästi pätee $f(x) \in [0,1]$, niin kaikilla $f, g \in A$ toteutuu

$$d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| \le 1.$$

Näin ollen

$$d(A) = \sup_{f,g\in A} d(f,g) \le 1.$$

Olkoon nyt $\epsilon \in (0, 1/2)$, jolloin $|1 - \epsilon/2| < 1$. Tällöin

$$f_n(1 - \epsilon/2) = (1 - \epsilon/2)^n \to 0$$

kun $n \to \infty$. Erityisesti löytyy indeksi N jolle $|f_N(1 - \epsilon/2)| < \epsilon/2$. Koska $f_1(1 - \epsilon/2) = 1 - \epsilon/2$, niin nyt saadaan

$$d(f_1, f_N) \ge |1 - \epsilon/2 - f_N(1 - \epsilon/2)| \ge 1 - \epsilon/2 - \epsilon/2 = 1 - \epsilon.$$

Koska $\epsilon > 0$ voidaan valita mielivaltaisen pieneksi, pätee $d(A) \ge 1$.

Edellisten havaintojen nojalla $d(A) = 1$.

2. Onko $\mathbb{R}^2$:n osajoukko avoin, kun se on

(a) $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2\}$, (b) $B = A^c$, (c) $C = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \sin x_1 < x_2\}$? Lyhyt vastaus riittää.

RATKAISU: (a) Selvästi origo eli piste $(0,0) \in A$. Jos $r > 0$, niin aina pätee $(r/2, 0) \in B((0,0), r)$ mutta $(r/2, 0) \notin A$. Näin ollen A ei ole avoin.

(b) Olkoon $x \in B = A^c$. Tällöin siis $x_1 \ne x_2$. Asetetaan

$$r = |x_1 - x_2|/4 > 0.$$

Jos nyt $y = (y_1, y_2) \in B(x, r)$, niin pätee

$$4r = |x_1 - x_2| = |x_1 - y_1 + y_1 - y_2 + y_2 - x_2| \le |x_1 - y_1| + |y_1 - y_2| + |y_2 - x_2|.$$

Mutta jos $y \in B(x,r)$, niin $|x_1 - y_1| \leq r$ ja $|x_2 - y_2| \leq r$, joten saadaan

$$4r \leq |y_1 - y_2| + 2r,$$

joten

$$0 < 2r \leq |y_1 - y_2|.$$

Tästä seuraa että $y_1 \neq y_2$ eli että $y \in B$. Siis B on avoin.

(c) Olkoon $x \in C$. Siis $x = (x_1, x_2)$ ja $x_2 > \sin x_1$. Asetetaan

$$\epsilon = |x_2 - \sin x_1|/4 = (x_2 - \sin x_1)/4 > 0,$$

jolloin $x_2 = \sin x_1 + 4\epsilon$. Koska $u \mapsto \sin u$ on jatkuva reaaliakselilla, niin on olemassa $\delta > 0$, jolle pätee $|\sin u - \sin x_1| < \epsilon$ kun $|x_1 - u| \leq \delta$. Olkoon nyt $r := \min(\epsilon, \delta)$. Tällöin, jos $y \in B(x,r)$, niin $|y_1 - x_1| \leq r \leq \delta$, joten

$$\sin y_1 < \sin x_1 + \epsilon.$$

Toisaalta pätee myös $|x_2 - y_2| < r \leq \epsilon$, erityisesti siis $y_2 > x_2 - \epsilon$. Näin ollen

$$y_2 > x_2 - \epsilon > \sin x_1 + 4\epsilon - \epsilon > \sin y_1 - \epsilon + 4\epsilon - \epsilon > \sin y_1,$$

joten $y \in C$. Siis C on avoin.

3. (3:5) Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $A \subset X$. Osoita, että A on kaikkien ympäristöjensä leikkaus.

RATKAISU: Merkitään A:n ympäristöjen leikkausta A':lla. Koska jokainen A:n ympäristö sisältää A:n, niin tietenkin pätee $A \subset A'$.

Osoitetaan että $A' \setminus A = \emptyset$. Tehdään vastaoletus, eli että jokin piste $x \in A' \setminus A$. Tällöinhän $A \subset X \setminus \{x\}$, joten $X \setminus \{x\}$ on eräs A:n ympäristö, sillä se on avoin ja sisältää A:n. Kuitenkin $x \notin X \setminus \{x\}$, mistä seuraa ettei voi päteä $x \in A'$. Tämä on ristiriita, joten $A' \setminus A = \emptyset$.

4. Tarkastellaan funktioavaruutta $E = C([0,1], \mathbb{R})$ varustettuna sup-normilla $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$ (tässä sup on tunnetusti max) ja tämän luomalla metriikalla. Mitkä seuraavista joukoista ovat avoimia E:ssä (perustelu):

(a) $A = \{f \in E \mid \|f\|_\infty > 0\}$, (b) $B = \{f \in E \mid f(x) > 0\ \forall x \in [0,1]\}$, (c) $C = \{f \in E \mid f(1/n) > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\}$?

RATKAISU: (a) Jos $f \in A$ ja $r = \|f\|_\infty/2 > 0$, niin tällöin jos $g \in B(f,r)$, niin

$$\|g\|_\infty = \|f + g - f\|_\infty \geq \|f\|_\infty - \|g - f\|_\infty \geq \|f\|_\infty/2 > 0.$$

Siten $g \in A$, mikä todistaa että A on avoin.

(b) Olkoon $f \in B$. Koska f on jatkuva, niin se saa pienimmän arvonsa joka oletuksen nojalla on aidosti positiivinen, siis

$$\min_{x \in [0,1]} f(x) = a > 0.$$

Jos nyt $r = a/2$ ja $g \in B(f,r)$, niin tällöin kaikilla $x \in [0,1]$ pätee

$$g(x) > f(x) - r = f(x) - a/2 \geq a/2 > 0.$$

Siten $g \in B$ ja B on avoin.

(c) Huomataan että $f(x) = x$ kuuluu joukkoon C, onhan

$$f(1/n) = 1/n > 0$$

kaikilla luonnollisilla luvuilla n. Jos $r > 0$, niin aina pätee

$$g = f - r/2 \in B(f,r).$$

Mutta $g(1/n) = f(1/n) - r/2 = 1/n - r/2 < 0$, kun n on tarpeeksi suuri (eli jokin lukua $2/r$ suurempi luonnollinen luku). Siten $g \notin C$, mikä osoittaa ettei C ole avoin.

5. Olkoon X metrinen avaruus, kuvaus $f : X \to \mathbb{R}$ olkoon jatkuva pisteessä $a \in X$ ja $f(a) > 0$. Osoita, että a:lla on ympäristö $U \subset X$, jossa kaikilla x pätee $f(x) > f(a)/2$.

RATKAISU: Valitaan $\epsilon = f(a)/2 > 0$. Jatkuvuuden määritelmästä seuraa että a:lla on ympäristö U jossa $f(x) > f(a) - \epsilon = f(a)/2$. Väite on todistettu.

6. (4:2) Anna esimerkki jatkuvasta funktiosta $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, joka ei ole Lipschitz. Perustele.

RATKAISU: Tarkastellaan neliöjuurta $f(x) = x^{1/2}$. Tämä on toki jatkuva välillä $[0,1]$. Jos f olisi Lipschitz, niin olisi olemassa vakio $L > 0$, jolle

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

kaikilla $x, y \in [0, 1]$. Mutta nyt jos $x = 0$, niin tämä tarkoittaisi että

$$y^{1/2} \leq Ly$$

kaikilla $y \in (0, 1]$. Jos $y \neq 0$, niin voimme jakaa puolittain $y^{1/2}$:lla ja L:llä ja saamme

$$1/L \leq y^{1/2}$$

kaikilla $y \in (0, 1]$. Tämä on ristiriita sillä $y^{1/2} \to 0$ kun $y \to 0$ (neliöjuuren jatkuvuuden nojalla). Siis f ei ole Lipschitz.