Topologia I
Harjoitus 10, ratkaisuja
AP

TEHTÄVÄ 1. Olkoon (f_n) jono jatkuvia funktioita $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, joka suppenee välillä $[a, b]$ tasaisesti kohti funktiota $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Osoita, että tällöin

$$\int_a^b f_n(x)\, dx \to \int_a^b f(x)\, dx.$$

Päteekö vastaava tulos derivaatoille? Lyhyt vastaus.

RATKAISU 1. Olkoon $\epsilon > 0$ ja $N \in \mathbb{N}$ sellainen indeksi että

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon/(b - a)$$

kunhan $n > N$. Nyt

$$|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \leq \epsilon/(b - a) \int_a^b dx = \epsilon.$$

Näin ollen reaalilukujen $\int f_n$ muodostama jono suppenee lukuun $\int f$. $\square$

Vastaava tulos ei päde derivaatoille: Jos määritellään $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ kaavalla $f_n(x) = n^{-1} \sin(nx)$, niin on helppo nähdä, että $f_n \to 0$ tasaisesti. Kuitenkaan derivaattojen jono $f_n'(x) = \cos(nx)$ ei suppene edes pisteittäin mihinkään funktioon.

Ei ole myöskään totta että jatkuvasti derivoituvien funktioiden tasainen raja olisi jatkuvasti derivoituva: Tarkastellaan väliä $[-1, 1]$ ja siinä määriteltyjä funktioita $f_n(x) = |x|^{1+(1/n)}$. Nämä ovat jatkuvasti derivoituvia, mutta jono (f_n) suppenee tasaisesti funktioon $|x|$, joka ei ole derivoituva.

TEHTÄVÄ 2. (12:3) Todista, että metrisen avaruuden täydellinen osajoukko on suljettu. Tästä seuraa lauseen 12.6 käänteinen puoli.

RATKAISU 2. Olkoon A metrisen avaruuden X täydellinen osajoukko ja $a \in \bar{A}$. Olkoon (x_n) sellainen A:n jono, että $x_n \to a$ (avaruudessa X). Lauseen 12.3 nojalla (x_n) on Cauchy jono (metrisessä avaruudessa A), joten $x_n \to x \in A$. Mutta raja-arvon yksikäsitteisyyden nojalla $x = a$, joten $a \in A$ ja siis $\bar{A} \subset A$. Siten A on suljettu. $\square$

TEHTÄVÄ 3. (12:4) Olkoon (X, d) täydellinen metrinen avaruus ja (x_n) sellainen jono X:ssä, että $d\big(x_n, x_{n+1}\big) \leq 10 * 2^{-n}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Osoita, että jono suppenee kohti jotakin pistettä $a \in X$. Osoita lisäksi, että $d(x_5, a) < 1$.

RATKAISU 3. Olkoot x_k ja x_m tehtävän jonon jäseniä ja oletetaan että $n \leq k \leq m$. Erityisesti $m = k + p$ jollain $p \in \mathbb{N}$. Nyt kolmioepäyhtälöstä saadaan

$$d(x_k, x_m) \leq d(x_k, x_{k+1}) + d(x_{k+1}, x_{k+2}) + ... + d(x_{k+p-1}, x_m)$$

$$\leq \sum_{i=0}^{p-1} 10 \cdot 2^{-n-i} \leq \sum_{i=0}^{\infty} 10 \cdot 2^{-n-i} \leq 10 \cdot 2^{-n+1}.$$

Tämä saadaan mielivaltaisen pieneksi kun annetaan n:n lähestyä ääretöntä. Siten (x_n) on Cauchy ja suppeneminen seuraa täydellisyydestä.

Koska $x_n \to a$, on olemassa $N > 5$, jolla $d(x_N, a) < 1/4$. Toisaalta yllä olevaa estimaattia käyttämällä nähdään että

$$d(x_5, x_N) \leq \sum_{i=0}^{\infty} 10 \cdot 2^{-5-i} = 10 * 2^{-4} = 5/8.$$

Kolmioepäyhtälö antaa

$$d(x_5, a) \leq d(x_5, x_N) + d(x_N, a) \leq 1/4 + 5/8 = 7/8 < 1,$$

joten väite on tosi. □

TEHTÄVÄ 4. (12:6, muunnos) Tarkastellaan jatkuvien funktioden avaruutta $E = C([0,1], \mathbb{R})$ varustettuna supnormilla $\| * \|_\infty$.

(a) Osoita, että normiavaruuden $(E, \| * \|_\infty)$ Cauchy-jono (f_n) suppenee pisteittäin välin $[0,1]$ pisteissä kohti erästä funktiota $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

(b) Osoita, että suppeneminen $f_n \to f$ on tasaista välillä $[0,1]$.

(c) Osoita edellisiin kohtiin ja lauseeseen 11.24 nojaten, että normiavaruus $(E, \| * \|_\infty)$ on täydellinen.

Ohje. (b) Olkoon $\epsilon > 0$. Valitse sellainen n_ϵ, että $\|f_k - f_n\|_\infty < \epsilon/2$, kun $k, n \geq n_\epsilon$, ja anna n:n mennä äärettömään.

RATKAISU 4. (a) Jos (f_n) on Cauchy ja $x \in [0,1]$, niin

$$|f_k(x) - f_m(x)| \leq \|f_k - f_m\|_\infty,$$

joten $(f_n(x))$ on Cauchy jono reaaliakselilla. Reaaliakselin täydellisyydestä seuraa että $f_n(x) \to y_x \in \mathbb{R}$. Asettamalla $f(x) = y_x$ saadaan haluttu pisteittäinen rajafunktio.

(b) Tehdää kuten ohjeessa. Otetaan $\epsilon > 0$ ja n_ϵ siten että

$$\|f_k - f_n\|_\infty < \epsilon/2$$

kunhan $k, n > n_\epsilon$. Jos nyt $x \in [0,1]$, niin

$$|f_k(x) - f(x)| \le |f_k(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \le \|f_k - f_n\|_\infty + |f_n(x) - f(x)|$$

kaikilla n. Valitaan nyt $n(x) > n_\epsilon$ siten että

$$|f_{n(x)}(x) - f(x)| < \epsilon/2,$$

jolloin jos $k > n_\epsilon$, niin saadaan

$$|f_k(x) - f(x)| \le \|f_k - f_{n(x)}\|_\infty + |f_{n(x)}(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Tämä pätee kaikille $x \in [0,1]$, siis todetaan että

$$\|f_k - f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f_k(x) - f(x)| \le \epsilon,$$

joten suppeneminen on tasaista.

(c) Koska jatkuvien funktioiden jono (f_n) suppenee tasaisesti funktioon f, niin lauseen 11.24 nojalla f on jatkuva. Toisin sanoen $f \in E$, joten E on täydellinen. $\square$

TEHTÄVÄ 5. (12:11) Olkoon X täydellinen ja $f : X \to Y$ bilipschitz. Osoita, että kuvajoukko fX on täydellinen ja siis suljettu Y:ssä.

RATKAISU 5. Ensinnäkin havaitaan että bilipschitz funktiot ovat aina injektioita; Jos $f(x) = f(y)$, niin

$$0 = d(f(x), f(y)) \ge c d(x, y) \ge 0,$$

joten $x = y$ ($c > 0$ on tässä se pienempi bilipschitz-vakio). Siten jokaista fX:n pistettä y vastaa yksikäsitteinen $x \in X$. Jos nyt (y_n) on Cauchy jono fX:ssä, niin sitä vastaa yksikäsitteinen X:n jono (x_n) siten että $f(x_n) = y_n$. Nyt, koska (y_n) on Cauchy, niin jos $\epsilon > 0$, niin on olemassa n_ϵ siten että $d(y_k, y_m) < c\epsilon$, kunhan $k, m > n_\epsilon$. Mutta nyt

$$d(x_k, x_m) \le (1/c) d(f(x_k), f(x_m)) = (1/c) d(y_k, y_m) < \epsilon,$$

aina kun $k, m > n_\epsilon$. Siten (x_n) on Cauchy X:ssä. Koska X on täydellinen, niin $x_n \to x \in X$. Väitämme lopuksi että $y_n \to y = f(x)$, mutta tämä seuraa siitä että f on jatkuva ja lauseesta 11.8. Koska mielivaltainen Cauchy jono (y_n) suppenee, niin fX on täydellinen. $\square$

TEHTÄVÄ 6. (12:14) Olkoon $(E, \| * \|)$ täydellinen normiavaruus eli Banachin avaruus, ja olkoon $f : E \to E$ kontraktio. Osoita, että yhtälö $F(x) = x + f(x)$ määrittelee homeomorfismin $F : E \to E$, joka on bilipschitz.

Ohje. Kiinnitetään $y \in E$ ja merkitään $g_y(x) = y - f(x)$. Osoita, että kuvauksella $g_y : E \to E$ on täsmälleen yksi kiintopiste $G(y)$, jolloin saadaan kuvaus $G : E \to E$, $y \mapsto G(y)$. Osoita, että $F \circ G = G \circ F = id_E$, ja että F on bilipschitz. Kiinnitä erityistä huomiota epäyhtälöketjun puoleen $m\|x - z\| \le \|F(x) - F(z)\|$, kaikilla $x, z \in E$, missä $m > 0$.

RATKAISU 6. Osoitetaan ensin että $F : E \to E$ on bilipschitz. Jos $x, y \in E$, niin

$$\|F(x)-F(y)\| = \|x+f(x)-y-f(y)\| \le \|x-y\|+\|f(x)-f(y)\| \le (q+1)\|x-y\|,$$

missä $0 < q < 1$ on f:ään liittyvä kontraktiovakio. Toisaalta

$$\|x + f(x) - y - f(y)\| \ge |\|x - y\| - \|f(x) - f(y)\|| \ge (1 - q)\|x - y\|,$$

joten F on bilipschitz.

Edetään seuraavaksi niinkuin ohjeessa; Jos $y \in E$, niin

$$x \mapsto g_y(x) = y - f(x)$$

määrittelee kontraktion $E \to E$. Tämä on selvää sillä

$$\|g_y(x) - g_y(z)\| = \|y - f(x) - y + f(z)\| = \|f(x) - f(z)\| \le q\|x - z\|$$

jollain $0 < q < 1$, onhan f kontraktio. Koska E on täydellinen, niin Banachin kiintopistelauseen nojalla g_y:llä on täsmälleen yksi kiintopiste, $G(y)$, joka siis toteuttaa

$$g_y(G(y)) = y - f(G(y)) = G(y). \tag{1}$$

On selvää että G määrittää kuvauksen $E \to E$. Jos $y \in E$, niin (1):n mukaan

$$F(G(y)) = G(y) + f(G(y)) = y - f(G(y)) + f(G(y)) = y = \mathrm{id}_E(y).$$

Jos $y \in E$, niin $G(F(y))$ on määritelmänsä mukaan kuvauksen $g_{F(y)}$ kiintopiste. Toisaalta

$$g_{F(y)}(y) = F(y) - f(y) = y + f(y) - f(y) = y,$$

joten myös y on kiintopiste. Yksikäsitteisyyden nojalla tällöin $G(F(y)) = y$. Näin ollen $F \circ G = G \circ F = \mathrm{id}_E$. Siis f on bijektio ja G sen käänteiskuvaus.

Koska F on bijektio ja bilipschitz, se on homeomorfismi. $\square$