Topologia I, Kevät 2010
Kertaustehtäviä 1, ratkaisut
Jouni Puuronen

1 (a)

Kuvaus $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, x \mapsto \|x\| = \sqrt{|x_1| + 5|x_2|}$ ei määrittele normia, sillä ehto N2 (kirjan kohta 1.6) ei toteudu. Nyt $\|ax\| = \sqrt{|a|}\|x\|$ eikä $\|ax\| = |a|\|x\|$.

(b)

Kuvaus $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto d(x,y) = \|x - y\|$ määrittelee metriikan. Ehdot M2 ($\|x-y\| = \|y-x\|$) ja M3 ($\|x\| = 0 \iff x = 0$) toteutuvat ilmeisesti (kirjan kohta 2.1), ja myös M1 toteutuu sillä

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \sqrt{|x_1 - z_1| + 5|x_2 - z_2|} \\ &\leq \sqrt{\big(|x_1 - y_1| + |y_1 - z_1|\big) + 5\big(|x_2 - y_2| + |y_2 - z_2|\big)} \\ &\leq \sqrt{|x_1 - y_1| + 5|x_2 - y_2|} + \sqrt{|y_1 - z_1| + 5|y_2 - z_2|} \\ &= d(x,y) + d(y,z) \end{aligned} \tag{1}$$

Ensimmäinen epäyhtälö perustuu tavallisen itseisarvon kolmioepäyhtälöön, ja siihen, että kuvaus $u \mapsto \sqrt{u}$ on monotoninen. Toinen perustuu tehtävänannon vihjeeseen $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

2

Määritellään kuvaus $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, d(s,t) = \ln(1 + |s - t|)$. Tällöin $(s,t) \mapsto d(s,t)$ on metriikka. $d(s,t) \geq 0$ on selvä, M2 ($d(s,t) = d(t,s)$) on selvä, ja M3 ($d(s,t) = 0 \iff s = t$) on selvä, logaritmin perusominaisuuksien nojalla. Ehdon M1 todistaminen onnistuu seuraavasti: Logaritmin monotonisuuden nojalla

$$d(s,t) = \ln(1 + |s-t|) \leq \ln(1 + |s-u| + |u-t|) \tag{2}$$

joten jos halutaan todistaa

$$d(s,t) \leq d(s,u) + d(u,t) \tag{3}$$

riittää todistaa

$$\ln(1 + x + y) \leq \ln(1+x) + \ln(1+y) \tag{4}$$

kaikille $x, y \geq 0$.

$$\begin{aligned} 0 &\leq xy \\ \implies 1 + x + y &\leq 1 + x + y + xy \\ &= (1+x)(1+y) \\ \implies \ln(1+x+y) &\leq \ln((1+x)(1+y)) \\ &= \ln(1+x) + \ln(1+y) \end{aligned} \tag{5}$$

3

Pitää osoittaa, että kaikilla $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$ on voimassa

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| \tag{6}$$

eli nyt

$$|\max\{x_1, y_1\} - \max\{x_2, y_2\}| \leq \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \tag{7}$$

Tehtävän voi jakaa neljään osaan seuraavasti:

(i) $x_1 \geq y_1$ ja $x_2 \geq y_2$

(ii) $x_1 \geq y_1$ ja $x_2 < y_2$

(iii) $x_1 < y_1$ ja $x_2 \geq y_2$

(iv) $x_1 < y_1$ ja $x_2 < y_2$

Tapaukset (i) ja (iv) ovat ilmeisiä, sillä tällöin todistettavana ovat selvät ja samankaltaiset epäyhtälöt

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| &\leq \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ |y_1 - y_2| &\leq \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \end{aligned} \tag{8}$$

Samalla tavoin myös (iii) on samanlainen kuin (ii), joten riittää todistaa enää tapaus (ii). Tällöin todistettavana on

$$|x_1 - y_2| \leq \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \tag{9}$$

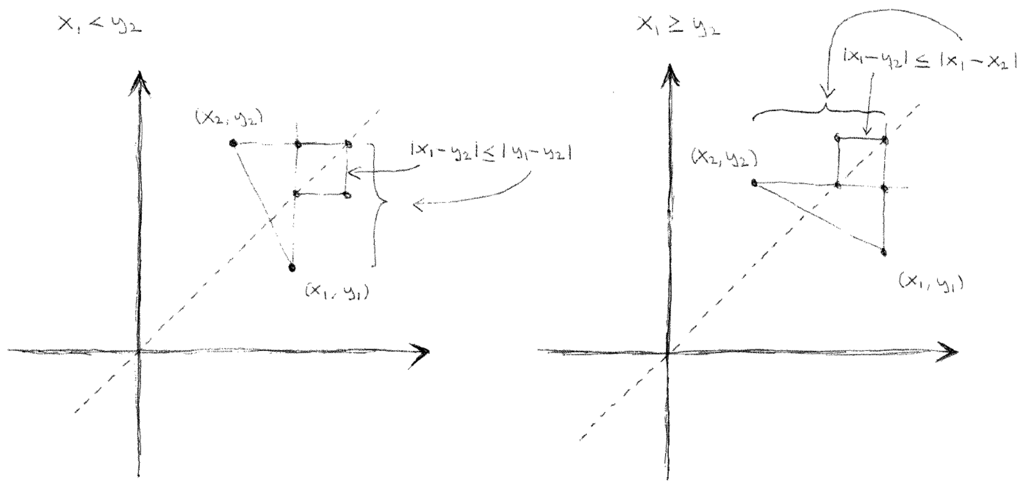
Tämä epäyhtälö on tosi koska aina on voimassa ainakin joko $|x_1 - y_2| \leq |x_1 - x_2|$ tai $|x_1 - y_2| \leq |y_1 - y_2|$.

Jos $x_1 \geq y_2$, niin

$$\begin{aligned} -y_2 &< -x_2 \qquad \text{(oletus (ii))} \\ \implies \underbrace{x_1 - y_2}_{\geq 0} &< x_1 - x_2 \\ \implies |x_1 - y_2| &< |x_1 - x_2| \end{aligned} \tag{10}$$

Jos $x_1 < y_2$, niin

$$\begin{aligned} -x_1 &\leq -y_1 \qquad \text{(oletus (ii))} \\ \implies \underbrace{y_2 - x_1}_{\geq 0} &\leq y_2 - y_1 \\ \implies |x_1 - y_2| &\leq |y_1 - y_2| \end{aligned} \tag{11}$$



4

Kuvaus $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = xy$ on jatkuva, ja yksiöt $\{1\}$ ja $\{3\}$ ovat suljettuja, joten joukot $A = f^{-1}\{1\}$ sekä $B = f^{-1}\{3\}$ ovat suljettuja.

$d(A, B) = 0$, sillä kun $\varepsilon > 0$ on m.v. voidaan valita $x > 0$ s.e. $\frac{1}{x} < \frac{\varepsilon}{2}$. Tällöin

$$d(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} \|a - b\| \le \| \underbrace{(x, \frac{1}{x})}_{\in A} - \underbrace{(x, \frac{3}{x})}_{\in B} \| = \frac{2}{x} < \varepsilon. \tag{12}$$

5

Määritellään funktiot $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x + y + z \\ g(x, y, z) &= 1 + x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned} \tag{13}$$

niin

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x + y + z < 1 + x^2 + y^2 + z^2\} \\ &= (f^{-1}]0, \infty[) \cap ((g - f)^{-1}]0, \infty[). \end{aligned} \tag{14}$$

A on avoin, sillä $]0, \infty[$ on avoin, f ja $g - f$ ovat jatkuvia, alkukuvat ovat avoimia, ja avointen joukkojen äärellinen leikkaus on avoin.

Määritellään funktiot $f, g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= 1 + x^2 + y^2 \\ g(x, y, z) &= z \\ h(x, y, z) &= 3 + x^2 + y^2 \end{aligned} \tag{15}$$

niin

$$
\begin{aligned}
B &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 + x^2 + y^2 \leq z \leq 3 + x^2 + y^2\} \\
&= ((g - f)^{-1}[0, \infty[) \cap ((h - g)^{-1}[0, \infty[).
\end{aligned} \tag{16}
$$

B on suljettu, sillä $[0, \infty[$ on suljettu, $g - f$ ja $h - g$ ovat jatkuvia, alkukuvat ovat suljettuja, ja suljettujen joukkojen leikkaus on suljettu.

6

Oletetaan $d(A, B) > 0$. Pitää todistaa, että $d(x, A) + 5d(x, B) > 0$ kaikilla $x \in X$. Kolmioepäyhtälöstä

$$
d(A, B) \leq d(A, x) + d(x, B) \tag{17}
$$

nähdään, että ainakin toinen luvuista $d(x, A)$ ja $d(x, B)$ on aina aidosti positiivinen, joten tilanne $d(x, A) + 5d(x, B) = 0$ olisi mahdoton.

Kolmioepäyhtälön voi todistaa kirjoittamalla aluksi mielivaltaisille $a \in A$, $b \in B$

$$
d(A, B) \leq d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) \tag{18}
$$

ja ottamalla sitten infimum oikean puolen yli.

Kirjan kohdan 4.6 mukaan $x \mapsto d(x, A)$ on jatkuva, ja kuvauksen

$$
x \mapsto f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + 5d(x, B)} \tag{19}
$$

jatkuvuus seuraa kirjan kohdista 4.12, 5.2, 5.3 (yhdisteet, summat ja kertolaskut jatkuvia), sekä tiedetyksi oletettavasta tiedosta, että $]0, \infty[\to]0, \infty[$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ on jatkuva.

Selvästi aina $f(x) \geq 0$, ja lisäksi kun $x \in A$, niin $f(x) = 0$, joten $\min(\operatorname{im} f) = 0$.

Selvästi aina

$$
d(x, A) \leq d(x, A) + 5d(x, B) \tag{20}
$$

joten aina $f(x) \leq 1$, ja lisäksi kun $x \in B$, niin $f(x) = 1$, joten $\max(\operatorname{im} f) = 1$.

7 (a)

$$
A = \{(x, y) \mid x \neq 0, \ |y| \leq |x|\} \tag{21}
$$

Kuvasta on ilmeistä, että kaikki A:n pisteet ovat kasautumispisteitä, joten A:lla ei ole erakkopisteitä.

Joukko $A_0 := \{(x, y) \mid |y| \leq |x|\}$ on suljettu, sillä se saadaan jatkuvan kuvauksen $(x, y) \mapsto |x| - |y|$ alkukuvana joukosta $[0, \infty[$.

Kuvasta on ilmeistä, että $A_0 = A \cup \{0\}$.

Kuvasta on ilmeistä, että myös $0 \notin A$ on A:n kasautumispiste, joten A ei ole suljettu (lause 6.22).

Koska $0 \in \overline{A}$ ja $A \subset \overline{A} \subset A \cup \{0\}$ (lause 6.8 kohdat 1 & 4, sulkeuma on suppein suljettu A:n sisältävä joukko), voidaan päätellä, että $\overline{A} = A \cup \{0\}$.

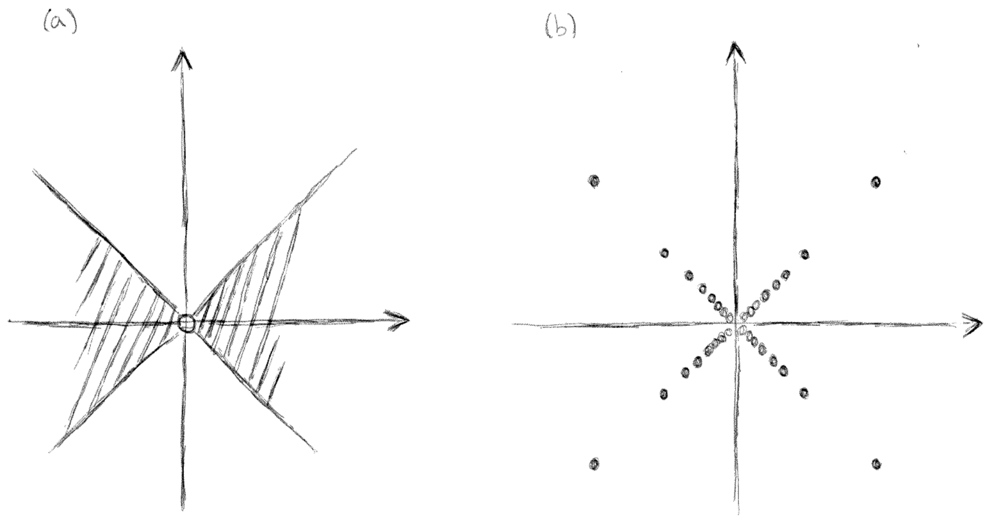
(b)

$$A = \{(x, y) \mid |x| = |y| = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\} \tag{22}$$

Kuvasta on ilmeistä, että kaikki A:n pisteet ovat erakkopisteitä.

Kuvasta on ilmeistä, että kaikilla $\varepsilon > 0$, joukossa $B(0, \varepsilon)$ on äärettömästi A:n pisteitä, ja joukossa $\mathbb{R}^2 \backslash B(0, \varepsilon)$ äärellisesti. Siispä $0 \notin A$ on A:n kasautumispiste, ja A ei ole suljettu.

Lisäksi mikään joukon $\mathbb{R}^2 \backslash B(0, \varepsilon)$ sisäpiste ei ole ikinä kasautumispiste millään $\varepsilon > 0$, ja toissaalta kaikki joukon $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ pisteet ovat joukon $\mathbb{R}^2 \backslash B(0, \varepsilon)$ sisäpisteitä jollain $\varepsilon > 0$. Siispä 0 on A:n ainoa kasautumispiste. Lauseen 6.21 nojalla $\overline{A} = A \cup \{0\}$ (sulkeuma saadaan lisäämällä joukkoon kasaantumispisteet).



(c)

$$A = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{(x, y) \mid y \leq kx\} \tag{23}$$

Kuvasta on mahdollista päätellä, että

$$A = \{(x, y) \mid y \leq 0 \text{ tai } x > 0\}. \tag{24}$$

Kuvasta on ilmeistä, että kaikki A:n pisteet ovat kasautumispisteitä, joten A:lla ei ole erakkopisteitä.

Kuvasta on ilmeistä, että myös joukon $\{(x,y) \mid x=0 \text{ ja } y>0\}$ pisteet ovat A:n kasautumispisteitä, joten A ei ole suljettu, ja

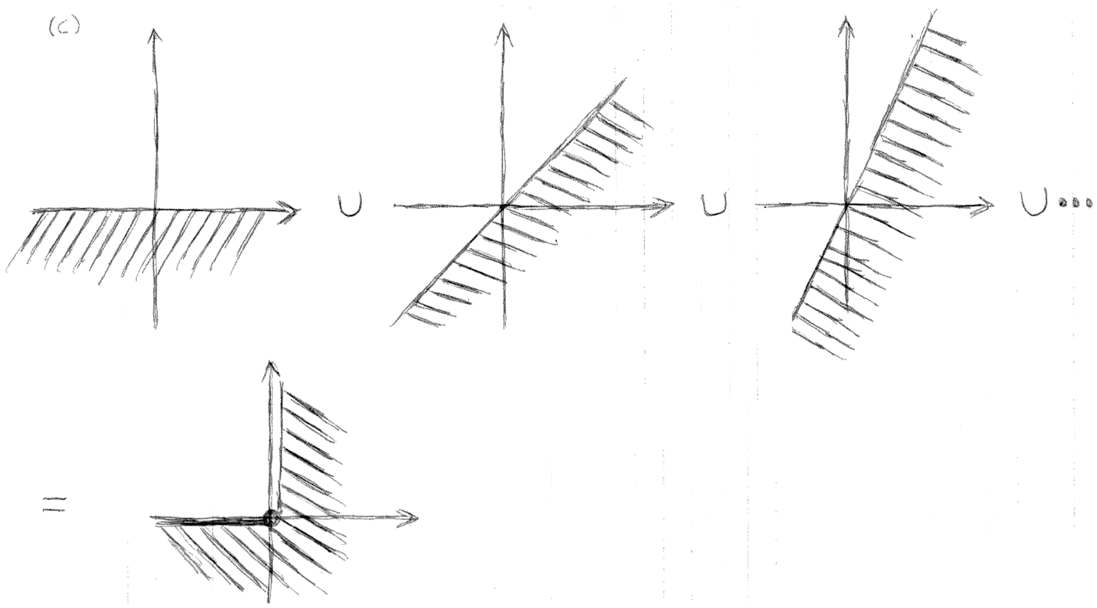
$$\underbrace{A \cup \{(x,y) \mid x=0 \text{ ja } y>0\}}_{=\{(x,y) \mid y \leq 0 \text{ tai } x \geq 0\}} \subset \overline{A}. \tag{25}$$

Joukko $\{(x,y) \mid y \leq 0 \text{ tai } x \geq 0\}$ voidaan kirjoittaa jatkuvien kuvausten $(x,y) \mapsto y$ ja $(x,y) \mapsto x$ suljettujen alkukuvien äärellisenä yhdisteenä, joten se on suljettu. Lauseen 6.8 kohdan 4 (sulkeuma on suppein suljettu A:n sisältävä joukko) perusteella

$$\overline{A} \subset \{(x,y) \mid y \leq 0 \text{ tai } x \geq 0\}. \tag{26}$$

Nyt on todistettu

$$\overline{A} = \{(x,y) \mid y \leq 0 \text{ tai } x \geq 0\}. \tag{27}$$



8

Pitää todistaa

$$f: X \to Y \text{ on jatkuva} \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{f^{-1}B} \subset f^{-1}\overline{B} \text{ kaikilla } B \subset Y \tag{28}$$

" $\Longrightarrow$ ":

Oletetaan, että $f: X \to Y$ on jatkuva. Koska $B \subset \overline{B}$, myös

$$f^{-1}B \subset f^{-1}\overline{B} \tag{29}$$

$f^{-1}\overline{B}$ on suljettu, joten lauseen 6.8 kohdan 3 nojalla

$$\overline{f^{-1}B} \subset f^{-1}\overline{B}. \tag{30}$$

(Sulkeuman ottaminen ei kasvata joukkoa suuremman suljetun joukon yli.)

" $\Longleftarrow$ ":

Oletetaan, että $f : X \to Y$ ei ole jatkuva (antiteesi). Tällöin on olemassa suljettu $B \subset Y$ siten, että $f^{-1}B$ ei ole suljettu. $\overline{f^{-1}B}$ kuitenkin on suljettu, joten $\overline{f^{-1}B} \neq f^{-1}B$. Lisäksi aina $f^{-1}B \subset \overline{f^{-1}B}$, joten nyt

$$\overline{f^{-1}B} \not\subset f^{-1}B = f^{-1}\overline{B}. \tag{31}$$

Ehto $\overline{f^{-1}B} \subset f^{-1}\overline{B}$ ei siis päde kaikilla $B \subset Y$ antiteesin vallitessa.

9

Joukossa $\mathbb{R}_+$ on muitakin suljettuja joukkoja kuin välit $[a, b]$. Jos haluaa todistaa, että suljettujen joukkojen alkukuvat ovat suljettuja, ei riitä tarkastella vain jotain suljettuja joukkoja.