Topologia I, Kevät 2010
Harjoitus 1, ratkaisut
Jouni Puuronen

1. Olkoon X perusjoukko ja olkoon $B \subset X$. Merkintä CB tarkoittaa komplementtia X:ssä: $CB = X \setminus B$. Olkoot $A_i \subset X$ kaikilla $i \in I$. Todista de Morganin laki

$$C \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} CA_i.$$

Mielivaltaisella x voidaan päätellä seuraavasti:

$$\begin{aligned} x \in C \bigcup_{i \in I} A_i &\iff x \notin \bigcup_{i \in I} A_i \\ &\iff \text{ei pidä paikkaansa, että } (x \in A_i \text{ jollain } i \in I) \\ &\iff \text{kaikilla } i \in I \text{ on } x \notin A_i \\ &\iff \text{kaikilla } i \in I \text{ on } x \in CA_i \\ &\iff x \in \bigcap_{i \in I} CA_i \end{aligned} \tag{1}$$

2. Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ ylhäältä rajoitettu, epätyhjä reaalilukujoukko: on olemassa sellainen $a \in \mathbb{R}$, että $x \leq a$ kaikilla $x \in A$. Silloin A:n ylärajojen joukko $S = \{a \in \mathbb{R} \,|\, x \leq a \text{ kaikilla } x \in A\}$ on epätyhjä (ja alhaalta rajoitettu). Palautetaan mieleen (äärellisen) supremumin määritelmä: Reaalilukujen täydellisyysominaisuus sanoo, että näissä ylärojoissa on olemassa pienin luku, joukon A supremum $\sup A = \min S \in \mathbb{R}$. Toisin sanoen $\sup A \in S$ ja, jos $a \in S$, niin $\sup A \leq a$.

(a) Osoita, että $\sup A$ on yksikäsitteisesti määrätty.

(b) Jos on olemassa $m = \max A$, niin $\sup A = m$.

(c) Olkoon $\varepsilon > 0$. Löytyy sellainen $x \in A$ että $x > \sup A - \varepsilon$.

Huom. Reaalilukujoukon A suurimman alarajan, infimumin, ominaisuudet saadaan joukon $-A = \{-x \,|\, x \in A\}$ supremumin ominaisuuksista (-1:llä kertominen kääntää järjestyksen).

(a) Oletetaan, että $x_1 = \min S$ ja $x_2 = \min S$.
Koska $x_1 \in S$ ja $x_2 = \min S$, siispä $x_2 \leq x_1$.
Koska $x_2 \in S$ ja $x_1 = \min S$, siispä $x_1 \leq x_2$.
Koska $x_1 \leq x_2$ ja $x_2 \leq x_1$, siispä $x_1 = x_2$.
(b) Oletetaan, että $\max A$ on olemassa.
Koska $\max A \in S$ ja $\sup A = \min S$, siispä $\sup A \leq \max A$.

Koska $\max A \in A$ ja $\sup A \in S$, siispä $\max A \leq \sup A$. (S:n määritelmä: aseta $\max A =: x$ ja $\sup A =: a$)

Koska $\max A \leq \sup A$ ja $\sup A \leq \max A$, siispä $\max A = \sup A$.

(c) Olkoon $\varepsilon > 0$ m.v. Pitää todistaa, että on olemassa sellainen $x \in A$, että $x > \sup A - \varepsilon$.

Antiteesi: Kaikilla $x \in A$ on $x \leq \sup A - \varepsilon$.

Tällöin S:n määritelmän mukaan $\sup A - \varepsilon \in S$, ja

$$\min S \leq \sup A - \varepsilon = \min S - \varepsilon < \min S, \tag{2}$$

mikä on ristiriita koska $\min S$ on yksikäsitteinen.

3. Olkoot $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x| < 1\}$ ja $B = \{1/k \,|\, k \in \mathbb{N}\}$. Määrää $\sup A$, $\inf A$, $\max A$, $\min A$, $\sup B$, $\inf B$, $\max B$ ja $\min B$, mikäli kyseinen luku on olemassa. Lyhyt vastaus riittää.

Kun joukoista piirtää kuvan, vastaukset ovat ilmeisiä:
$\sup A = 1$, $\inf A = -1$,
$\max A$ ei ole olemassa, $\min A$ ei ole olemassa,
$\sup B = 1$, $\inf B = 0$,
$\max B = 1$, $\min B$ ei ole olemassa.

4. Olkoot $f : X \to Y$ ja $A_i \subset X$, $i \in I$. Tunnetusti pätee $f \cap \{A_i \,|\, i \in I\} \subset \cap\{fA_i \,|\, i \in I\}$. Osoita esimerkillä, jossa $\#X = 3$ ja $\cap\{A_i \,|\, i \in I\} \neq \emptyset$, että edellä annetussa inkluusiossa ei joukkojen yhtäsuuruuden tarvitse päteä.

Eräs mahdollisuus: $f : \{1,2,3\} \to \{1,2\}$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 2$, $A_1 = \{1,2\}$ ja $A_2 = \{1,3\}$.

Tällöin $fA_1 \cap A_2 = f\{1\} = \{1\} \neq \{1,2\} = fA_1 \cap fA_2$.

5. Todista seuraava (Väisälä, lause 0.14): Oletetaan, että $f : X \to Y$, $g : Y \to X$, $g \circ f = id_X$ ja $f \circ g = id_Y$. Tällöin f ja g ovat bijektioita, ja $g = f^{-1}$.

Ohje. Pidetään tunnettuna seuraava: Jos $f : X \to Y$ on bijektio ja $f^{-1} : Y \to X$ sen käänteiskuvaus, niin $f^{-1} \circ f = id_X$ ja $f \circ f^{-1} = id_Y$.

Riittää todistaa, että f on bijektio. (g:n bijektiivisyys seuraa tilanteen symmetriasta.)

Injektiivisyys: Kun $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, niin $g(f(x_1)) = x_1 \neq x_2 = g(f(x_2))$. Siispä $f(x_1) \neq f(x_2)$, sillä kuvaus g ei voisi kuvata yhtä pistettä kahdeksi.

Surjektiivisuus: Kun $y \in Y$ on m.v., niin $g(y) \in X$ ja $f(g(y)) = y$. Siispä $fX = Y$.

$g = f^{-1}$ saadaan seuraavasti:

$$g = \mathrm{id}_X \circ g = f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ \mathrm{id}_Y = f^{-1}. \tag{3}$$