Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I (Kevät 2010)
Harjoitus 3
Ratkaisuja (Timo Vuori)

1. (Väisälä 1:11) Olkoon $E = C([0,1])$. Tutki, mitkä normin ehdoista (N1), (N2) ja (N3) ovat voimassa, kun asetetaan $\|x\| = |x(0)|$, $x \in E$.

Ratkaisu: Ainakin $\|\cdot\|$ on hyvin määritelty kuvaus $E \to [0,\infty)$, kuten normilta aina edellytetään. Ent ehdot (N1) – (N3)?

(N1) Tämä ehto on voimassa. Jos nimittäin $x, y \in E$, niin

$$\|x+y\| = |(x+y)(0)| = |x(0)+y(0)| \le |x(0)| + |y(0)| = \|x\| + \|y\|.$$

(N2) Tämäkin ehto on voimassa. Jos $x \in E$ ja $a \in \mathbf{R}$, niin

$$\|ax\| = |(ax)(0)| = |ax(0)| = |a||x(0)| = |a|\|x\|.$$

(N3) Tm ehto *ei ole* voimassa. Esimerkiksi identtinen kuvaus $id\colon [0,1] \to [0,1]$, $id(t) = t$, on avaruuden E nollasta poikkeava alkio, jolla kuitenkin $\|id\| = id(0) = 0$. Siis $\|x\| = 0 \not\Rightarrow x = 0$.

Avaruudessa $C[0,1]$ kytetn tavallisesti normia $\|x\|_\infty := \sup\{|x(t)| : t \in [0,1]\} = \max\{|x(t)| : t \in [0,1]\}$.

2. (1:7, osa) Tarkastellaan $\mathbf{R}^n$:n normeja $|x|$ = tavallinen normi, $|x|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$ ja $|x|_\infty = \max(|x_1|, \cdots, |x_n|)$. Osoita, että (a) $|x|_\infty \le |x| \le |x|_1 \le n|x|_\infty$ kaikilla $x \in \mathbf{R}^n$. (b) $|x|_1 \le \sqrt{n}|x|$ kaikilla $x \in \mathbf{R}^n$. Ohje. Kohdan (a) keskimmäisessä epäyhtälössä kirjoita $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ ja sovella kolmioepäyhtälöä. (b):ssä sovella Schwarzin epäyhtälöä vektoreihin $(|x_1|, \cdots, |x_n|)$ ja $(1, \cdots, 1)$. *Ratkaisu:* (a) Kiinnitetn $x \in \mathbf{R}^n$. Olkoon $k_{\max} \in \{1, \ldots, n\}$ se indeksi, jolla $|x_{k_{\max}}| = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} = |x|_0$. Silloin

$$|x|_0 = |x_{k_{\max}}| = \sqrt{x_{k_{\max}}^2} \le \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = |x|,$$

mikä on epäyhtölistä ensimmäinen. Toista varten kirjoitetaan vinkin kannustamana $x = \sum x_j e_j$, jolloin kolmioepäyhtälän nojalla

$$|x| = \left|\sum_{j=1}^n x_j e_j\right| \le \sum_{j=1}^n |x_j e_j| = \sum_{j=1}^n |x_j| = |x|_1.$$

Viimeinen epäyhtälö päätellään seuraavasti:

$$|x|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n| \le |x_{k_{\max}}| + \ldots + |x_{k_{\max}}| = n|x_{k_{\max}}| = n|x|_0.$$

(b) Havaitaan, että $|x|_1 = (1, \ldots, 1) \cdot (|x_1|, \ldots, |x_n|)$. Siis Cauchy-Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} |x|_1 &= (1, \ldots, 1) \cdot (|x_1|, \ldots, |x_n|) \le |(1, \ldots, 1)||(|x_1|, \ldots, |x_n|)| \\ &= \sqrt{1^2 + \ldots + 1^2}\sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2} = \sqrt{n}\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt{n}|x|. \end{aligned}$$

Huomautus: Tehtävässä on kyse seuraavasta yleisestä ilmistä: jos $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ ovat *mitä hyvänsä* normeja avaruudessa $\mathbf{R}^n$, niin on olemassa vakiot $a > 0$ ja $b > 0$, joilla $a\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le b\|x\|_1$ kaikilla $x \in \mathbf{R}^n$. Todistus: Väisälän kirjan Lause 15.17.

3. Määritä tason $\mathbf{R}^2$ pallo $S(a,6)$, kun $a=(-1,2)$ ja metriikkana on $d(x,y) =$

$2|x_1-y_1|+3|x_2-y_2|$, jossa $x=(x_1,x_2)$ ja $y=(y_1,y_2)$. Ei tarvitse osoittaa, että kyseessä on todella metriikka, mutta voihan sen tehdäkin.

$S(a,6)=\{x \in R : d(a,x)=6\}$, joten $x \in S(a,6)$

$$\Longleftrightarrow x \in d(ax,6)$$

$$\Longleftrightarrow 6 = 2|-1-x_1|+3|2-x_2| \Longleftrightarrow 6 = \begin{cases} 2(-1-x_1)+3|2-x_2|. & kun \quad 1-x_1 \geq 0 \\ 2(1+x_1)+3|2-x_2|, & kun \quad -1-x_1 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2(-1-x_1)+3(2-x_2). & kun \quad -1 \geq x_1, \quad 2 \geq x_2 \\ 2(-1-x_1)+3(2-x_2). & kun \quad -1 \geq x_1 \quad ,2 < x_2 \\ 2(1+x_1)+3(2-x_2), & kun \quad -1 < x_1 \quad ,-2 \geq x_2, \\ 2(1+x_1)+3(2-x_2), & kun \quad -1 < x_1 \quad ,2 < x_2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 4-2x_1-3x_2. & kun \quad -1 \geq x_1, \quad 2 \geq x_2 \\ -8-2x_{\S}+3x_2. & kun \quad -1 \geq x_1 \quad ,2 < x_2 \\ 5+2x_1-3x_2, & kun \quad -1 < x_1 \quad ,-2 \geq x_2, \\ -1+2x_1+3x_2, & kun \quad -1 < x_1 \quad ,2 < x_2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2=-2x_1-3x_2. & kun \quad -1 \geq x_1, \quad 2 \geq x_2 \\ 14=-2x_{\S}+3x_2. & kun \quad -1 \geq x_1 \quad ,2 < x_2 \\ 1=2x_1-3x_2, & kun \quad -1 < x_1 \quad ,-2 \geq x_2, \\ 7=2x_1+3x_2, & kun \quad -1 < x_1 \quad ,2 < x_2 \end{cases}$$

Siis $S(a,6)$ on suunnikas, jonka kärjet ovat $(-4,2),(2,2),(-1,0)$ ja $(-1,4)$.

4. (1:10) Osoita, että yhtälö $\|x\| = \max\{|x_1|+|x_2|, 2|x_1|\}$ määrittelee normin tasossa $\mathbf{R}^2$. Piirrä yksikköpallo $S=\{x \in \mathbf{R}^2 \mid \|x\|=1\}$.

Ratkaisu: Ensinnäkin $x \mapsto \|x\|$ on kuvaus $\mathbf{R}^2 \to [0,\infty)$. Entä ehdot (N1) – (N3)?

(N1) Olkoot $x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2) \in \mathbf{R}^2$. Silloin

$$|x_1+y_1|+|x_2+y_2| \leq (|x_1|+|x_2|)+(|y_1|+|y_2|) \leq \|x\|+\|y\|$$

ja

$$2|x_1+y_1| \leq 2|x_1|+2|y_1| \leq \|x\|+\|y\|,$$

joten

$$\|x+y\| = \max\{|x_1+y_1|+|x_2+y_2|, 2|x_1+y_1|\} \leq \|x\|+\|y\|.$$

(N2) Olkoon $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ ja $a \in \mathbf{R}$. Silloin

$$\|ax\| = \max\{|ax_1| + |ax_2|, 2|ax_1|\} = \max\{|a|(|x_1| + |x_2|), |a|(2|x_1|)\}$$
$$= |a| \max\{|x_1| + |x_2|, 2|x_1|\} = |a|\|x\|.$$

(N3) Jos $\|x\| = 0$, niin erityisesti $|x_1| + |x_2| = 0$. Tämä mahdollista, jos ja vain jos $|x_1| = 0 = |x_2|$, jolloin $x = (x_1, x_2) = (0, 0)$.

5 (2.13) . Olkoon $E = raj([0,1], \mathbf{R})$ varustettuna sup-normilla. Määritä sen osajoukkojen $A = \{f_n : [0,1] \to \mathbf{R} \,|\, f_n(x) = x^n,\, n \in \mathbf{N}\}$ ja $B = \{f : [0,1] \to \mathbf{R} \,|\, f\ on\ vakiofunktio\}$ välinen etäisyys $d(A, B)$.
Väite: $d(A, B) = 1/2$.

Todistus.(i) Määritellään $g_0(x) = 1/2$ kaikilla $x \in [0,1]$. Tällöin $g_0 \in B$ ja $|f_n(x) - g_0(x)| = |x^n - 1/2| \leq 1/2$, koska $0 \leq x^n \leq 1$ kaikilla n ja kaikilla $x \in [0,1]$. Lisäksi
$|f_n(0) - g_0(0)| = |0 - 1/2| = 1/2$ (ja $|f_n(1) - g_0(1)| = |1 - 1/2| = 1/2$),
joten $d(f_n, g_0) = 1/2$..
(ii)Kun $g \in B$ ja $g \neq g_0$, on $d(f_n, g) > 1/2$: Jos g(x)=c>1/2, on
$d(f_n, g) = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - g(x)|$
$= \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - c| \geq |f_n(0) - c| = |0 - c| = c > 1/2$
Samoin, .jos g(x)=c<1/2, on
$d(f_n, g) = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - g(x)|$ $=\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - c|$
$\geq |f_n(1) - c| = |1 - c| -> 1/2$.

6. (2:17) Olkoon F normiavaruuden E vektorialiavaruus, ja olkoot $x \in E$, $y \in F$ ja $a > 0$. Osoita, että pätee

$$d(y + ax, F) = a\, d(x, F).$$

.
Toidistus.(i) Olkoon $u \in F$, Määritellään $z = a^{-1}(u - y)$ Tällöin $u = az + y \in F$, koska $u, y \in F$ ja F on aliavaruus. Saadaan

$$d(y + ax, u) = \|y + ax - u\| = \|ax + y - (az + y)\| = \|ax - az\|$$

$$= |a|\|x - z\| = ad(x, z) \geq ad(x, F)$$

$$\Longrightarrow d(ax + y, F) = \inf_{u\in F} d(ax + y, , u) \geq ad(x, F)$$

(ii) Olkoon $z \in F$. Kun määritellään $u = az + y$, on $z = a^{-1}(u - y) \in F$, koska $u, y \in F$ ja F on aliavaruus. Tällöin

$$ad(x, z) = |a|\|x - z\| = \|ax - az\| = \|ax - a(a^{-1}(u - y))\|$$

$$= \|ax + y - u\| = d(ax + y, u) \geq d(ax + y, F)$$

$$\Longrightarrow ad(x, F) = a \inf_{z\in F} d(x, z) \geq d(ax + y, F)$$

□