Topologia I

Harjoitus 11, kevät 2010, Ratkaisut

1. (13:3) Tutki $\mathbf{R}^2$:n joukoista A_k, ovatko ne (a) kompakteja, (b) täydellisiä, kun

$A_1 = \{(x,y) \mid x^2 + 3y^2 \leq 4\}$, $A_2 = \{(x,y) \mid xy = 1\}$, $A_3 = \{(x,y) \mid x^2 + 3y^2 < 4\}$.

Ratk.

A_1: Näytetään, että A_1 on suljettu ja rajoitettu. Siitä seuraa että se on kompakti ja täydellinen. Olkoon (x_n, y_n) A_1:n jono, $(x_n, y_n) \to (x, y)$ kun $n \to \infty$. Koska kaikilla n pätee $x_n^2 + 3y_n^2 \leq 4$ tämä epäyhtälö säilyy rajalla $\lim_{n\to\infty}$, siis

$$x^2 + 3y^2 \leq 4.$$

Erityisesti $(x, y) \in A_1$. Näinollen A_1 on suljettu.

Rajoitettuus seuraa suoraan määritelmästä, sillä millä tahansa $(x, y) \in A_1$ on $x^2 + y^2 \leq x^2 + 3y^2 \leq 4$.

A_2: Tämä joukko ei ole kompakti, sillä se ei ole rajoitettu (alkiot $(n, 1/n)$ kuuluvat siihen kaikilla $n \in \mathbb{N}$) mutta se on edelleen suljettu, jolloin se on myös täydellinen. Nähdäksemme suljettuuden olkoon taas (x_n, y_n) A_2:n jono joka suppenee kohti alkiota (x, y). Pitää näyttää, että $(x, y) \in A_2$ eli $xy = 1$. Tämä on kuitenkin selvää, sillä funktio $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(z, w) = zw$ on jatkuva. Erityisesti $1 = f(x_n, y_n) \to f(x, y) = xy$ kun $n \to \infty$.

A_3: Tämä joukko on rajoitettu, minkä voi nähdä samoin kuin A_1:n tapauksessa. Se ei kuitenkaan ole suljettu, eikä siten kompakti eikä täydellinen. Nähdäksemme tämän voimme tarkastella jonoa $(1 - 1/n, 1 - 1/n) \in A_3$ tai huomata, että

$$A_3 = f^{-1}(]-\infty, 4[)$$

missä $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = x^2 + 3y^2$, josta seuraa että A_3 on avoin.

2. Olkoon $A \neq \emptyset$ tason $\mathbf{R}^2$ suljettu ja rajoitettu osajoukko. Osoita, että löytyy sellainen piste $(a, b) \in A$ (ainakin yksi), että $x + 2y \leq a + 2b$ kaikilla $(x, y) \in A$.

Ohje. Käytä jatkuvaa kuvausta. Piirrä havainnekuva.

Ratk. Oletusten nojalla A on epätyhjä kompakti joukko. Määritellään kuvaus $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ kaavalla $f(x, y) = x + 2y$. Tämä on selvästi jatkuva kuvaus, joten se saa kompaktissa joukossa suurimman arvonsa, ts. on olemassa $(a, b) \in A$ siten, että

$$f(a, b) = \max_{(x,y)\in A} f(x, y).$$

Erityisesti siis kaikilla $(x, y) \in A$ on $x + 2y \leq a + 2b$.

3. (a) Olkoon $r > 0$, ja olkoon A metrisen avaruuden (X, d) osajoukko, josta lötyy sellainen jono (x_n), että $d(x_k, x_n) \geq r$ kaikilla $k \neq n$. Osoita, että A ei ole kompakti.

(b) Varustetaan jatkuvien funktioden avaruus $E = C([0,1], \mathbf{R})$ supnormilla $\| * \|_\infty$, $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \, : \, x \in [0,1]\}$ kun $f \in E$. Osoita a-kohtaa hyväksi käyttäen, että suljettu yksikkökuula

$$\bar{B} = \bar{B}(\mathbf{0}, 1) = \{f \in E \, : \, \|f\|_\infty \leq 1\}$$

ei ole kompakti, vaikka se on suljettu ja rajoitettu joukko E:ssä. Ohje. Paloittain määritellyt (yksinkertaiset) funktiot $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$.

Ratk. (a) Jos A olisi kompakti, niin jokaisella sen jonolla olisi suppeneva osajono. Kuitenkaan väitteen jonolla ei voi olla yhtään suppenevaa osajonoa, sillä jos valitaan $\varepsilon = r/2 > 0$, niin millään alkioilla x_n, x_k, $n \neq k$ ei päde $d(x_n, x_k) < \varepsilon$.

(b) Määritellään funktiojono $(f_n) \subset \bar{B}$ seuraavasti: $f_0 = 0$ ja

$$f_1(t) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq t \leq 1/2 \\ 2^1(t - 1/2) & , 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{1}$$

ja yleisesti

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq t \leq 2^{-n} \\ 2^n(t - 2^{-n}) & , 2^{-n} \leq t \leq 2^{-n+1} \\ 1 & , 2^{-n+1} \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{2}$$

Nämä kuvaukset saavat siis yksikkövälin alkupäässä arvon nolla, kohoavat lineaarisesti välillä $I_n = [2^{-n}, 2^{-n+1}[$ nollasta yhteen, ja pysyvät yksikkövälin loppuun asti siellä. Tärkeää on, että välit I_n ovat erillisiä, ts. $I_n \cap I_m = \varnothing$ jos $n \neq m$. Erityisesti tästä seuraa, että jos $n \neq m$ niin

$$\|f_n - f_m\|_\infty = 1,$$

joten jonolla on (a)-kohdan ominaisuus. Siten $\bar{B}$ ei ole kompakti.

4. (13:4, muunnos) Olkoon avaruus (X, d) kompakti, ja olkoon $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ laskeva jono sen suljettuja, epätyhjiä osajoukkoja.

(a) Osoita, että leikkaus $\cap_{n \in \mathbf{N}} A_n$ on epätyhjä ja kompakti.

(b) Osoita, että jos lisäksi $d(A_n) \to 0$, niin leikkaus on yksiö.

(c) Päteekö a-kohta, jos oletus kompaktiudesta pudotetaan pois?

Ohje. (a) Avaruuden X avoimien peitteiden käyttö antaa erityisen lyhyen todistuksen. Voi myös käyttää jonoa (x_n), jossa $x_n \in A_n$. (c) Valitse $X = \mathbf{R}$.

Ratk. (a) Merkitään $B = \cap_{n \in \mathbf{N}} A_n$. Todistetaan aluksi, että B on epätyhjä. Koska jokainen joukoista A_n on epätyhjä, voimme valita alkiot $x_n \in A_n$ kaikilla n. Toisaalta sisäkkäisyyden nojalla saatu jono $(x_n)_{n=1}^\infty$ on A_1:n jono. Olkoon $x \in X$ sen jonkin osajonon raja-arvo. $x \in A_1$ sillä A_1 on suljettu. Merkitään osajonoa (x_{n_k}). Ottamalla äärellisen määrän jonon jäseniä alusta pois, voidaan todeta, että jokaisella $k \in \mathbb{N}$ (x_{n_k}) on A_k:n jono (sillä $x_{n_k} \in A_{n_k} \subset A_k$). Siten sen raja-arvo $x \in A_k$. Siis $x \in B$ ja B on epätyhjä.

Toinen tapa nähdä tämä on tehdä vastaoletus: $B = \varnothing$ eli

$$X = X \setminus B = \bigcup_{n=1}^{\infty} X \setminus A_n =: \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

missä $B_1 \subset B_2 \cdots$ ovat avoimia. On siis saatu X:n avoin peite, jolla on kompaktiuden nojalla oltava äärellinen osapeite, ts. jollekin N

$$X = \bigcup_{n=1}^{N} B_n$$

Toisaalta

$$\bigcup_{n=1}^{N} B_n = B_N$$

sisäkkäisyyden nojalla ja siis $A_N = X \setminus B_N = \varnothing$, ristiriita.

Olkoon sitten (x_n) B:n jono. Olkoon (x_{n_k}) osajono joka suppenee kohti alkiota $x \in X$. Koska (x_{n_k}) on A_n:n jono jokaisella $n \in \mathbb{N}$, niin $x \in A_n$. Siis $x \in B$ kuten yllä, ja on osoitettu, että B:n mielivaltaisella jonolla on B:n alkiota kohti suppeneva osajono, siis B on kompakti. Kompaktius voidaan perustella yksinkertaisemmin myös toteamalla että suljettujen joukkojen leikkauksena B on suljettu ja siis kompaktin avaruuden suljettuna osajoukkona kompakti.

(b) Oletetaan sitten, että $\lim_{n\to\infty} d(A_n) = 0$. Koska $B \subset A_n$ kaikilla n, niin $d(B) \leq d(A_n)$. Siis $0 \leq d(B) \leq \lim_{n\to\infty} d(A_n) = 0$, josta seuraa, että B on yksiö: jos $x, y \in B$ ja $x \neq y$ niin $0 < d(x, y) \leq d(B)$.

(c) (a)-kohdan väite ei päde, jos oletus X:n kompaktiudesta poistetaan. Tämän voi nähdä esimerkiksi ottamalla $X = \mathbf{R}$ ja $A_n = [n, \infty[$. Sen sijaan väite pätee vaikka X:ltä ei vaadittaisi kompaktiutta, jos sen sijaan vaaditaan, että joukot A_n ovat kompakteja (tai yhtäpitävästi, että A_1 on kompakti ja muut joukot suljettuja).

5. Osoita, että $\mathbf{R}^n$:n kaikki normit ovat bilipschitz-ekvivalentteja keskenään. Yhtäpitävästi: Olkoon $| * |$ avaruuden $\mathbf{R}^n$ tavallinen euklidinen normi ja olkoon $\| * \|$ jokin muu normi siinä. Osoita, että löytyy vakiot $M, m > 0$, joilla pätee

$$m|x| \leq \|x\| \leq M|x| \quad \text{kaikilla } x \in \mathbf{R}^n.$$

Ohje. Tarkastele kuvausta $f = \| * \| \circ id : S^{n-1} \to \mathbf{R}$, joka on yhdistelmä identtisestä kuvauksesta $id : \big(\mathbf{R}^n, | * |\big) \to \big(\mathbf{R}^n, \| * \|\big)$ ja normikuvauksesta $\| * \| : \big(\mathbf{R}^n, \|*\|\big) \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \|x\|$. Joukko S^{n-1} on $\mathbf{R}^n$:n euklidinen yksikköpallo $S^{n-1} = \{x \in \mathbf{R}^n \;:\; |x| = 1\}$. Aloita osoittamalla kyseinen id Lipschitz-kuvaukseksi.

Huom. Vakiot m ja M riippuvat normista $\|*\|$. Tulos merkitsee, että topologian (ja metriikankin) kannalta on samantekevää, mitä normia $\mathbf{R}^n$:ssä käytetään.

Ratk. Tehdään kuten ohjeessa ja määritellään $f : (S^{n-1}, |\cdot|) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \|x\|$. Valitaan $\mathbf{R}^n$:n kanta $(e_1, \ldots, e_n)$ ja käytetään tavanomaista konventiota $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$. Käyttämällä kolmioepäyhtälön unohdettua puolta saamme

$$|f(x) - f(y)| = |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

Arvioidaan epäyhtälön oikeaa puolta seuraavasti:

$$\|x-y\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k) e_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k| \|e_k\| \leq C \max_{1\leq k\leq n} |x_k - y_k|$$

missä $C = \sum_{k=1}^{n} \|e_k\|$. Yhdistämällä yllä olevat arvioon

$$\max_{1\leq k\leq n} |x_k - y_k| \leq |x-y|$$

saadaan Lipschitz-ehto $|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|$.

Erityisesti yllä oleva lasku osoittaa, että f on jatkuva ja saa kompaktissa joukossa S^{n-1} suurimman arvonsa, jota merkitään M:llä. Siis $\|x\| \leq M$ kaikilla $x \in S^{n-1}$. Tästä seuraa suoraan väitteen jälempi osa, sillä jos $x \neq 0$ niin $x/|x| \in S^{n-1}$ jolloin

$$\|x/|x|\| \leq M \Leftrightarrow \|x\| \leq M|x|.$$

Toisaalta f saa myös pienimmän arvonsa (joka ei ole nolla, sillä normin ehtojen takia f saa arvon nolla vain origossa, joka ei kuulu joukkoon S^{n-1}) jota merkitään m:llä. Taas kaikilla $x \neq 0$ on $x/|x| \geq m$ eli

$$\|x\| \geq m|x|.$$

Jos $x = 0$ niin väitteen molemmat epäyhtälöt ovat triviaalisti voimassa.

Olemme siis näyttäneet vaaditunlaisten vakioiden olemassaolon ja todistaneet näin väitteen.