Topologia I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 12, ratkaisuehdotus
26.4.–30.4.2010
(Stratos)

1. (14:12, muunnos) *Tarkastellaan* $\mathbb{R}^2$*:n joukkoa* $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| > |y|\}$.

   (a) Onko E *yhtenäinen? (b) Onko sulkeuma* $\bar{E}$ *yhtenäinen?*

   Ohje. (b) Origosta alkava jana, ts. polkuyhtenäisyys. Hainnollista kuvalla.

   Ratkaisu.

   (a) Merkitään

   $$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x < 0, x < y < -x\},$$
   $$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, -x < y < x\}.$$

   Nyt selvästi U ja V ovat avoimia ja lauseen 14.9 ehdot toteutuvat. Siispä E on epäyhtenäinen.

   (b) Olkoon $(a,b),(c,d) \in \bar{E}$. Muodostetaan kaksiosainen, origon kautta kulkeva murtoviiva yhdistämään pisteitä. Viiva on joukko

   $$J = \{k(a,b), k(c,d) | k \in [0,1]\}.$$

   Nyt koska $|b| \leq |a|, |d| \leq |c|$, niin $k|a| \leq k|b|$ ja $k|d| \leq k|c|$. Täten $J \subset \bar{E}$ ja $\bar{E}$ on murtoviivayhtenäisenä lauseen 14.23 mukaan myös yhtenäinen. Tarkan todistuksen voi halutessaan laatia käyttämällä tehtävän 3 tulosta.

2. *Tarkastellaan harjoituksen 11 tehtävässä 1 esiintyviä* $\mathbb{R}^2$*:n osajoukkoja*

   $A_1 = \{(x,y) \mid x^2 + 3y^2 \leq 4\}$, $A_2 = \{(x,y) \mid xy = 1\}$,
   $A_3 = \{(x,y) \mid x^2 + 3y^2 < 4\}$.

   Mitkä niistä ovat yhtenäisiä? Mitkä $\mathbb{R}^2$*:n alueita?*

   Ohje. Sama taktiikka kuin tehtävässä 1.

   Ratkaisu.

   A_1: Menettelemällä kuten tehtävässä 1, nähdään, että mitkä tahansa kaksi joukon A_1 pistettä voidaan yhdistää origon kautta kulkevalla murtoviivalla. Siispä A_1 on polkuyhtenäinen ja sitä myöten yhtenäinen. Koska $A_1 \in \mathbb{R}^2$ ei ole sekä avoin ja yhtenäinen, se ei ole alue.

A_2: Joukko A_2 voidaan esittää kahden erillisen suljetun joukon yhdisteenä. Joukko ei ole avoin, ei yhtenäinen eikä siis aluekaan.

A_3: Yhtenäisyys tulee samoin kuin joukolle A_1. Lisäksi A_3 on avoin, joten se on avaruuden $\mathbb{R}^2$ alue.

3. *Olkoon (X, d) metrinen avaruus, $I = [0, 1]$ ja $\alpha : I \to X, \beta : I \to X$ sen polkuja, joilla $\alpha(1) = \beta(0)$, siis ensimmäisen päätepiste on toisen alkupiste. Konstruoi α:n ja β:n avulla X:n polut $\gamma : I \to X$ ja $\eta : I \to X$, joilla $\gamma(0) = \alpha(0)$ ja $\gamma(1) = \beta(1)$, ja $\eta(0) = \beta(1)$ ja $\eta(1) = \alpha(0)$. Voi sanoa, että γ kulkee α:n ja β:n peräkkäin, ja η taas käänteisessä järjestykessä.*

   Ratkaisu. Ideana on jakaa ensin väli I kahteen osaan, vaikkapa $I = [0, 1/2] \cup [1/2, 1]$. Nyt kuvataan kukin osaväli sopivasti välille I, joka sitten kuvataan poluilla α ja β. Esimerkiksi

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ \beta(2t-1), & 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

   ja $\eta(t) = \gamma(1-t)$ toteuttavat vaatimukset.

4. (14:4) *Olkoon $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ ja $X = A \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$. Olkoon $f : X \to \mathbb{R}^2$ jatkuva kuvaus, jolla $f(x, 0) = (0, 0)$ kaikilla $x \in A$. Todista, että kuvajoukko fX on yhtenäinen.*

   Ohje. Avaruutta X ei siis tiedetä yhtenäiseksi, mutta väli $[0, 1]$ tiedetään. Mahdollisuuksia on monia, esimerkiksi lause 14.12 tai polkuyhtenäisyys.

   Ratkaisu. Osoitetaan, että kuvajoukko on polkuyhtenäinen. Oletetaan, että $(a, b), (c, d) \in X$. Seuraavalla tavalla löydetään pisteet $f(a, b)$ ja $f(c, d)$ yhdistävä polku. Kuljetaan ensin pisteestä (a, b) pisteeseen $(a, 0)$ ja sitten pisteestä $(c, 0)$ pisteeseen (c, d). Koska f on jatkuva ja $f(a, 0) = f(c, 0) = (0, 0)$, niin kaava

$$\alpha(t) = \begin{cases} f(a, (1-2t)b), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ f(c, (2t-1)d), & 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

   määrittelee jatkuvan polun joukossa fX.

5. (14:18) *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ konveksi rajoitettu joukko, joka yksinkertaisuuden vuoksi sisältää origon. Osoita, että komplementtijoukko $E = \mathbb{R}^2 \setminus A$ on polkuyhtenäinen.*

Ohje. Laita A suorakulmion sisään (aidosti). Käytä tehtävän 3 tulosta. Havainnollista kuvalla.

Ratkaisu. Väite on, että $\complement A$ on yhtenäinen. Merkitään $r = d(A) + 1 < \infty$ ja tarkastellaan kiekkoa $D = \bar{B}(\bar{0}, r)$. Selvästi aito inkluusio $A \subset D$ pätee. Kiekon ulkopuoliset pisteet on helppo yhdistää toisiinsa murtoviivalla, joten keskitytään tarkastelemaan joukkoa $D \setminus A$.

Olkoon siis $u, v \in D \setminus A$. Nyt radiaalisesti loittoneva puolisuora $\{tu | t > 1\}$ ei leikkaa joukkoa A. Nimittäin, jos leikkaisi, sanotaan pisteessä $w \in A$, niin tällöin jana $[\bar{0}, w] \not\subset A$. Tämä johtuu siitä, että $u \in [\bar{0}, w]$. Mutta toisaalta, koska $\bar{0}, w \in A$, niin konveksiuden nojalla pitäisi olla $[\bar{0}, w] \subset A$. Tämä on ristiriita. Samalla perustelulla myös pisteestä v voidaan kulkea janapolkua pitkin ympyrän kehälle. Yhdistetään janat lopuksi kehää pitkin jatkuvaksi poluksi. Tarkka todistus voidaan tehdä tehtävän 3 avulla.

6. (14:26) *Olkoon E normiavaruus, $\emptyset \neq A \neq E$ sen suljettu osajoukko, U joukon A ympäristö ja $a \in A$. Osoita, että $d(a, U \setminus A) = d(a, E \setminus A)$.*

   Ohje. Välittömästi voi todeta, että $d(a, U \setminus A) \geq d(a, E \setminus A)$. Miksi? Osoita, että jos $x \in E \setminus A$, niin jana $[a, x]$ kohtaa joukon $U \setminus A$, sanokaamme pisteessä y. Silloin $d(a, x) \geq d(a, y)$. Miksi muuten $U \setminus A \neq \emptyset$?

   Ratkaisu. Edetään ohjeen hengessä. Tarkistetaan ensin, että $U \setminus A$ on tosiaan epätyhjä. Inkluusio $A \subset U$ on aito, koska muuten $\varnothing \neq A \neq E$ olisi sekä avoin, että suljettu ja lauseen 14.7 mukaan normiavaruus E olisi epäyhtenäinen. Mutta normiavaruus on aina yhtenäinen. Niinpä aidosta inkluusiosta seuraa, että $U \setminus A \neq \varnothing$.

   Toiseksi, koska $U \subset E$, niin $U \setminus A \subset E \setminus A$. Tästä syystä

$$d(a, U \setminus A) = \inf_{x \in U \setminus A} d(a, x) \geq \inf_{x \in E \setminus A} d(a, x) = d(a, E \setminus A).$$

   Todistetaan seuraavaksi toinen suunta epäyhtälölle. Olkoon $x \in E \setminus A$. Tehdään vastaoletus: $[a, x] \cap U \setminus A = \varnothing$. Tällöin $[a, x] \subset \complement(U \setminus A) = \complement U \cup A$ ja siksi $[a, x] = (\complement U \cap [a, x]) \cup (A \cap [a, x])$. Tämän yhdisteen kumpikin jäsen on epätyhjä, koska muuten olisi $[a, x] \subset A$ vaikka $x \notin A$. Lisäksi oletusten mukaan $\complement U$ ja A ovat suljettuja, joten jana voidaan esittää sen relatiivitopologiassa kahden erillisen suljetun joukon yhdisteenä. Lauseen 14.6 nojalla jana on epäyhtenäinen. Tämä on ristiriita, sillä normiavaruuden jana on aina yhtenäinen. Niinpä on oltava olemassa $y \in [a, x] \cap U \setminus A$. Tällöin jollakin $t \in [0, 1]$ saadaan

$$d(y, a) = \|y - a\| = \|(1 - t)a + (t - 1)x\| \leq |1 - t| \|x - a\| \leq d(x, a).$$

Tästä seuraa, että

$$d(a, U \setminus A) \leq d(a, E \setminus A).$$