Topologia I
Kertaustehtävät 2
Ratkaisut (HM)

1. Todista Brouwerin kiintopistelause dimensiossa yksi: Jatkuvalla kuvauksella $f\colon [-1,1] \to [-1,1]$ (euklidinen metriikka) on ainakin yksi kiintopiste.

Ratkaisu. Voidaan olettaa, että $f(1) \neq 1$ ja $f(-1) \neq -1$ (muuten ei mitään todistettavaa, sillä joko 1 tai -1 on kiintopiste). Täten erityisesti $f(1) < 1$ ja $f(-1) > -1$, sillä f kuvaa välille $[-1,1]$. Olkoon $g(x) = x - f(x)$. Pannaan merkille, että nyt $g(-1) = -1 - f(-1) < 0$ ja $g(1) = 1 - f(1) > 0$. Koska g on myös jatkuva välillä $[-1,1]$, niin Bolzanon lauseen nojalla $g(x) = 0$ jollain ko. välin pisteellä x. Nyt x on kuvauksen f kiintopiste.

2. Olkoon A metrisen avaruuden X osajoukko. Osoita, että $\partial(\partial A) \subset \partial A$. Anna esimerkki tapauksesta, jossa $\partial(\partial A) \neq \partial A$.

Ratkaisu. Nyt $\partial(\partial A) = \overline{\partial A} \cap \overline{X \setminus \partial A} \subset \overline{\partial A} = \partial A$, sillä reuna on aina suljettu joukko. Tapauksessa $X = \mathbb{R}$ ja $A = \mathbb{Q}$ inkluusio on aito: $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$ ja $\partial(\partial \mathbb{Q}) = \partial \mathbb{R} = \emptyset$.

3. Olkoot $X =]0,1[$ ja $Y =]1,\infty[$. Tunnetusti kuvaus $f\colon X \to Y$, $f(x) = 1/x$, on homeomorfismi. Anna avaruuden X jono (x_n), joka on Cauchy, mutta vastaava kuvajono $(f(x_n))$ ei ole. Voiko tästä päätellä, ettei f ole bilipschitz?

Ratkaisu. Olkoon $x_n = 1/n$, $n = 2,3,4,\ldots$. Tällöin (x_n) on Cauchy, mutta $(f(x_n)) = (n)$ ei ole. Tästä voi päätellä, että f ei ole Lipschitz.

4. Tarkastellaan euklidista avaruutta $\mathbb{R}^n$ ja sen avointa yksikkökuulaa $B = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x| < 1\}$. Määritellään kuvaukset $f\colon B \to \mathbb{R}^n$ ja $g\colon \mathbb{R}^n \to B$ asettamalla

$$f(x) = \frac{x}{1-|x|}, \; x \in B, \quad g(x) = \frac{x}{1+|x|}, \; x \in \mathbb{R}^n.$$

Totea ensin, että kuvaukset on määritelty hyvin. Osoita, että $f\colon B \approx \mathbb{R}^n$, ts. että f on homeomorfismi. Onko se bilipschitz?

Ratkaisu. Kuvaus f on hyvin määritelty, sillä $1 - |x| > 0$ kaikilla $x \in B$. Kuvaus g on hyvin määritelty, sillä $|x| < 1 + |x|$ so. g kuvaa palloon B. Kuvaukset ovat selvästi jatkuvia. Riittää siis osoittaa, että $f(g(x)) = x$ (kun $x \in \mathbb{R}^n$) ja $g(f(x)) = x$ (kun $x \in B$). Nämä ovat suoria laskuja:

$$f(g(x)) = \frac{x/(1+|x|)}{1-|x|/(1+|x|)} = \frac{x}{1+|x|-|x|} = x,$$
$$g(f(x)) = \frac{x/(1-|x|)}{1+|x|/(1-|x|)} = \frac{x}{1-|x|+|x|} = x.$$

Kuvaus f ei ole Lipschitz, sillä $d(B) < \infty$ ja $d(f(B)) = d(\mathbb{R}^n) = \infty$.

5. Mallinnetaan maapallo $\mathbb{R}^3$:n yksikköpallona $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 | \, |x| = 1\}$. Sovitaan, että kullakin ajanhetkellä lämpötila on maapallon pinnalla määritelty jatkuva funktio. Osoita, että aina löytyy paikka, jossa on sama lämpötila kuin tasan toisella puolella maapalloa.

Ratkaisu. Olkoon ajanhetki kiinnitetty, ja $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ kuvaus s.e. $f(x)$ on lämpötila maapallon pisteessä $x \in \mathbb{S}^2$ ko. kiinteänä ajanhetkenä. Oletuksen mukaan f on jatkuva, ja siis myös kuvaus $g \colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}, g(x) = f(x) - f(-x)$, on. Huomaa, että $g(-x) = -g(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{S}^2$. Voidaan olettaa, että on olemassa piste x s.e. $g(x) \neq 0$ (muuten väite pätee kaikissa maapallon paikoissa). Jos esimerkiksi $g(x) > 0$, niin $g(-x) = -g(x) < 0$. Koska $\mathbb{S}^2$ on yhtenäinen ja funktio g jatkuva, niin $g(y) = 0$ jollain $y \in \mathbb{S}^2$ (ja tämä on väitteen paikka).

6. Tarkastellaan euklidisen tason osajoukkoa, käyrää $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, xy^2 = 1\}$. Onko se (a) täydellinen, (b) kompakti, (c) yhtenäinen? Perustelut.

Ratkaisu. Koska A on suljettu täydellisessä avaruudessa $\mathbb{R}^2$ (yksiön $\{1\}$ alkukuvana jatkuvassa kuvauksessa $(x, y) \mapsto xy^2$), niin A on täydellinen. Joukko A ei ole kompakti, sillä se ei ole rajoitettu (jos $M > 0$ on mielivaltainen, niin $(M^2, 1/M) \in A$ ja $|(M^2, 1/M)| \geq M^2$). Joukko A ei ole myöskään yhtenäinen, sillä se on avoimien, epätyhjien ja erillisten joukkojen $A_+ = A \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, y > 0\}$ ja $A_- = A \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, y < 0\}$ yhdiste.

7. Olkoon avaruus X kompakti ja (x_n) sen jono, jolla on tasan yksi kasautumisarvo a. Osoita, että $x_n \to a$.

Ratkaisu. Oletetaan, että $x_n \not\to a$. Tällöin on olemassa vakio $\epsilon > 0$ ja jonon (x_n) osajono (y_k) s.e. $d(y_k, a) \geq \epsilon$ kaikilla k. Kompaktiuden nojalla jonolla (y_k) on osajono (z_m) s.e. $z_m \to b$ jollain $b \in X$. Koska myös $d(z_m, a) \geq \epsilon$ kaikilla m, niin $b \neq a$. Kuitenkin b on jonon (x_n) osajonon (z_m) raja-arvona kasautumisarvo. Siis kasautumisarvoja onkin ainakin kaksi, mikä on ristiriita.

8. Olkoon $x_n = (cos(n\pi/2), \sin(n\pi/2)) \in \mathbb{R}^2$. Suppeneeko jono (x_n)? Määritä sen kasautumisarvot. Hae kullekin kasautumisarvolle jokin sitä kohti suppeneva osajono.

Ratkaisu. Ei suppene. Kasautumisarvoja ovat $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$ ja $(1, 0)$. Tarkemmin ottaen pätee $x_{4n-3} = (0, 1)$, $x_{4n-2} = (-1, 0)$, $x_{4n-1} = (0, -1)$ ja $x_{4n} = (1, 0)$ kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$.