Topologia I
Harjoitukset 7
Ratkaisut (HM)

1. (7:2) Tutki seuraavista joukoista $A \subset \bar{B}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leq 1\}$, mitkä niistä ovat avoimia avaruudessa $\bar{B}^2$:

$$(a)\ A = \{(x,y) \in \bar{B}^2 \,|\, xy > 0\}, \quad (b)\ A = \{(x,y) \in \bar{B}^2 \,|\, x \geq 0\}.$$

Ratkaisu. (a): Joukko A on avoin avaruudessa $\bar{B}^2$ Lauseen 7.2 nojalla, sillä $A = \bar{B}^2 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy > 0\}$, ja jälkimmäinen joukko on tason $\mathbb{R}^2$ avoin osajoukko (avoimen välin $]0,\infty[$ alkukuvana jatkuvassa kuvauksessa $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy$).

(b): Nyt A ei ole avoin avaruudessa $\bar{B}^2$, sillä esimerkiksi $(0,0) \in A$ mutta $(-\epsilon/2, 0) \in \{(x,y) \in \bar{B}^2 \setminus A \,|\, |(x,y)| < \epsilon\}$ kaikilla pienillä $\epsilon > 0$.

2. (7:3 osa) Muodosta seuraavien joukkojen $A \subset B^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 < 1\}$ sulkeumat avaruudessa B^2:

$$(a)\ A = \{(x,0) \in B^2 \,|\, -1 < x < 1\}, \quad (b)\ A = \{(x,y) \in B^2 \,|\, x+y > 0\}.$$

Mitkä A:t ovat suljettuja B^2:ssa?

Ratkaisu. Käytetään Lausetta 7.6 (sulkeumat koko tasossa $\mathbb{R}^2$ ovat selviä – lisätään avoimeen janaan päätepisteet ja avoimeen puolitasoon reunasuora).

(a): Nyt $\mathrm{cl}_{B^2} A = \bar{A} \cap B^2 = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -1 \leq x \leq 1\} \cap B^2 = A$. Erityisesti A on suljettu avaruudessa B^2.

(b): Nyt $\mathrm{cl}_{B^2} A = \bar{A} \cap B^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x+y \geq 0\} \cap B^2 = \{(x,y) \in B^2 \,|\, x+y \geq 0\}$. Tällöin erityisesti $(0,0) \in \mathrm{cl}_{B^2} A \setminus A$ so. A ei ole suljettu avaruudessa B^2.

3. Anna joukkojen

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 1\} \quad \text{ja} \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x < 1\}$$

sisä-, ulko- ja reunapisteet avaruudessa $\mathbb{R}^2$. Matemaattinen perustelu.

Ratkaisu. Pannaan merkille, että pisteet muotoa $(1,y)$, $y \in \mathbb{R}$, eivät ole joukon A sisäpisteitä: $(1-\epsilon/2, y) \in B((1,y),\epsilon) \setminus A$ kaikilla $\epsilon > 0$. Täten $\mathrm{int}\, A \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 1\}$. Koska toisaalta $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 1\} \subset A$ on tason $\mathbb{R}^2$ avoin osajoukko (avoimen välin $]1,\infty[$ alkukuvana projektiossa $(x,y) \mapsto x$), niin Lauseen 8.3 kohdan (8) nojalla $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 1\} \subset \mathrm{int}\, A$. On osoitettu, että $\mathrm{int}\, A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 1\}$. Koska A

on suljettu (suljetun välin $[1, \infty[$ alkukuvana projektiossa $(x, y) \mapsto x$), niin $A = \bar{A}$. Täten $\partial A = \bar{A} \setminus \operatorname{int} A = A \setminus \operatorname{int} A = \{(1, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ ja $\operatorname{ext} A = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{A} = \mathbb{R}^2 \setminus A = B$. Nyt lopulta $\partial B = \partial B^c = \partial A = \{(1, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$, $\operatorname{int} B = B$ (joukko B on avoin avoimen välin $]-\infty, 1[$ alkukuvana projektiossa $(x, y) \mapsto x$), $\bar{B} = \operatorname{int} B \cup \partial B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 1\}$ ja siis $\operatorname{ext} B = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 1\}$.

4. (8:2, 8:3) Olkoon

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0,\ x \geq 0,\ |y| < 1\}.$$

Määritä joukot $\operatorname{int} A$, ∂A ja $\bar{A}$ avaruudessa

$$(a)\ X = \mathbb{R}^2, \quad (b)\ Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0\}.$$

Yksityiskohtaista matemaattista perustelua ei tarvita, vaan voit ratkaisussasi nojautua sopiviin kuviin.

Ratkaisu. Huomaa, että $A = [0, \infty[\times [0, 1[\cup \{0\} \times]-1, 0[$ so. A on erään äärettömän suorakaiteen ja janan yhdiste. Kohdassa (a) sisäpisteet ym. otetaan joukossa X ja kohdassa (b) joukossa Y.

(a): Nyt $\operatorname{int} A =]0, \infty[\times]0, 1[$ (suorakaiteen sisäosa), $\partial A =]0, \infty[\times \{0\} \cup]0, \infty[\times \{1\} \cup \{0\} \times [-1, 1]$ (suorakaiteen reunat ja ylimääräinen jana) ja lopulta $\bar{A} = \operatorname{int} A \cup \partial A = [0, \infty[\times [0, 1] \cup \{0\} \times [-1, 0)$ (suljettu suorakaide ja jana).

(b): Joukoissa $\{0\} \times]0, 1[$ ja $]0, \infty[\times \{0\}$ ei pisteiden ympäristöistä löydy enää komplementin pisteitä, joten näistä tulee sisäpisteitä. Ratkaisu on muuten sama. Täten $\operatorname{int} A =]0, \infty[\times]0, 1[\cup \{0\} \times]0, 1[\cup]0, \infty[\times \{0\}$, $\partial A = [0, \infty[\times \{1\} \cup \{0\} \times [-1, 0]$ ja $\bar{A} = \operatorname{int} A \cup \partial A = [0, \infty[\times [0, 1] \cup \{0\} \times [-1, 0)$.

5. (7:7) Olkoon $A, B \subset X$ ja $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$. Osoita, että A ja B ovat avoimia ja suljettuja joukkoja avaruudessa $A \cup B$, tämä varustettuna luonnollisesti X:stä indusoidulla metriikalla. Täytyykö niiden olla avoimia tai suljettuja joukkoja avaruudessa X?

Ratkaisu. Koska $\operatorname{cl}_{A \cup B} A = \bar{A} \cap (A \cup B) = (\bar{A} \cap A) \cup (\bar{A} \cap B) = A \cup \emptyset = A$, niin A on suljettu avaruudessa $A \cup B$. Symmetrisesti myös joukko B on suljettu avaruudessa $A \cup B$. Koska $(A \cup B) \setminus A = B$ (onhan erityisesti $A \cap B = \emptyset$), niin joukon A komplementti avaruudessa $A \cup B$ on suljettu so. A on avoin avaruudessa $A \cup B$. Symmetrisesti joukko B on avoin avaruudessa $A \cup B$.

Tietenkään tälläinen tieto ei kerro yhtään mitään vastaavista kysymyksistä koko avaruudessa X. Olkoot esimerkiksi $X = \mathbb{R}$, $A = [0, 1[$ ja $B = [10, 11[$.