Topologia I
Harjoitus 6, kevät 2010
Ratkaisuehdotus

1. (5:7) Olkoon E normiavaruus, $I = [0,1]$ ja $f, g : I \to E$ jatkuvia. Osoita, että yhtälön

$$h(s,t) = (1-t)f(s) + tg(s)$$

määrittelemä kuvaus $h : I^2 \to E$ on jatkuva, missä I^2 on neliö $I \times I \subset \mathsf{R}^2$.

Ratkaisu:
Tavoitteena on onnistua kirjoittamaan tehtävän funktio h muotoon, johon voi soveltaa kappaleen 5 lausetta 5.3. Määritellään $a, b \colon I \mapsto \mathsf{R}$, $a(t) = 1 - t$ ja $b(t) = t$, koska tällöin

$$h = (a \circ \mathrm{pr}_2)(f \circ \mathrm{pr}_1) + (b \circ \mathrm{pr}_2)(g \circ \mathrm{pr}_1)$$

jolloin jatkuvuus seuraa projektion ja yhdistetyn jatkuvuudesta sekä lauseesta 5.3. On syytä huomata, että lauseessa 5.3 määritelty ”tulofunktio” ei ole $: X \times X \to E$, vaan $: X \to E$, joten lause ei automaattisesti todista tehtävän väitettä ilman edellisen kaltaista muokkausta.

2. Tutki, ovatko seuraavat tason R^2 osajoukot suljettuja:

(a) $\quad A_k = \{(x,y) \in \mathsf{R}^2 \mid 1/k \le |(x,y)| \le 1\}$, jossa $k \in \mathsf{N}$, $\quad (b)$ $\quad A = \bigcup_{k \in \mathsf{N}} A_k$.

Jos ei, niin määrää sulkeuma. Ohje. Sulkeumaksi osoittamisessa on hyötyä lauseen 6.8 kohdasta (4).

Ratkaisu:
Merkitään $B_k = B((0,0), 1/k) \subset \mathsf{R}^2$, missä $k \in \mathsf{N}$. Kirjan esimerkissä 6.2 on osoitettu, että suljettu kuula $\bar{B}(x,r) \subset X$ on suljettu joukko.

(a) Kirjoitetaan
$$A_k = \bar{B}_1 \setminus B_k = \bar{B}_1 \cap \complement B_k,$$
jossa leikattavat joukot ovat suljettuja. Suljettujen leikkaus on suljettu.

(b) Lauseessa 6.3 sanotaan, että suljettujen *äärellinen* yhdiste on suljettu, joten lauseesta ei ole tässä kohtaa apua. Kuitenkin de Morganin lain mukaan
$$A = \bigcup_{k \in \mathsf{N}} A_k = \bigcup_{k \in \mathsf{N}} \bar{B}_1 \cap \complement B_k = \bar{B}_1 \cap \complement \bigcap_{k \in \mathsf{N}} B_k = \bar{B}_1 \setminus \{(0,0)\},$$

joten A ei selvästikään ole suljettu. Osoitetaan vielä, että $\bar{B}_1$ on suppein suljettu joukko, joka sisältää A:n. Olkoon siis $F \subset \mathsf{R}^2$ suljettu, joka sisältää A:n. Silloin $\complement F$ on avoin ja $\complement F \subset \complement A = \complement \bar{B}_1 \cup \{(0,0)\}$, joten avoimuuden nojalla $\complement F \subset \complement \bar{B}_1 \Rightarrow \bar{B}_1 \subset F$. Lauseesta 6.8(4) seuraa

$$\bar{A} = \bar{B}_1.$$

3. Anna tason R^2 joukkojen

$$A = \{(k, 1/n) \,|\, k \in \mathsf{Z},\ n \in \mathsf{N}\} \quad \text{ja} \quad B = \{(k, 1/n) \,|\, k \in \mathsf{Q},\ n \in \mathsf{N}\}$$

kasautumispisteet ja sulkeumat. Lyhyt vastaus riittää.

Ohje. Kahden reaaliluvun $a < b$ välissä on aina rationaaliluku $q \in \mathsf{Q}$: $a < q < b$.

Ratkaisu:
Selvästi joukon A kasautumispisteet muodostavat joukon $\mathsf{Z} \times \{0\}$. Käyttämällä lausetta 6.21 saadaan

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A \cup \{z \in \mathsf{R}^2 \,|\, z \text{ on joukon } A \text{ kasautumispiste}\} \\ &= (\mathsf{Z} \times \{1/n \,|\, n \in \mathsf{N}\}) \cup (\mathsf{Z} \times \{0\}) \\ &= \mathsf{Z} \times (\{1/n \,|\, n \in \mathsf{N}\} \cup \{0\}) . \end{aligned}$$

Tarkastellaan seuraavaksi joukon B kasautumispisteitä. Ohjeen ja edellisen mukaan ainakin joukon $F = \mathsf{R} \times (\{1/n \,|\, n \in \mathsf{N}\} \cup \{0\})$ pisteet ovat B:n kasautumispisteitä. Käydään tästä esimerkiksi läpi muotoa $(r, 0)$, $r \in \mathsf{R}$ oleva piste. Olkoon $B((r,0), \varepsilon)$ jokin pisteen $(r, 0)$ kuulaympäristö. Nyt ohjeen mukaan löytyy sellainen $q \in \mathsf{Q}$, että $r - q < \varepsilon/\sqrt{2}$. Kun vielä $n > \sqrt{2}/\varepsilon$, niin

$$|(r, 0) - (q, 1/n)|^2 = (r - q)^2 + (0 - 1/n)^2 \le \varepsilon^2.$$

Muita kasautumispisteitä B:llä ei ole, koska F on suljettu ja $B \subset F$. Suljettuuden näkee kirjoittamalla $\complement F$ avointen suorakaiteiden yhdisteenä. Siispä lauseen 6.21 nojalla

$$\bar{B} = B \cup F = F.$$

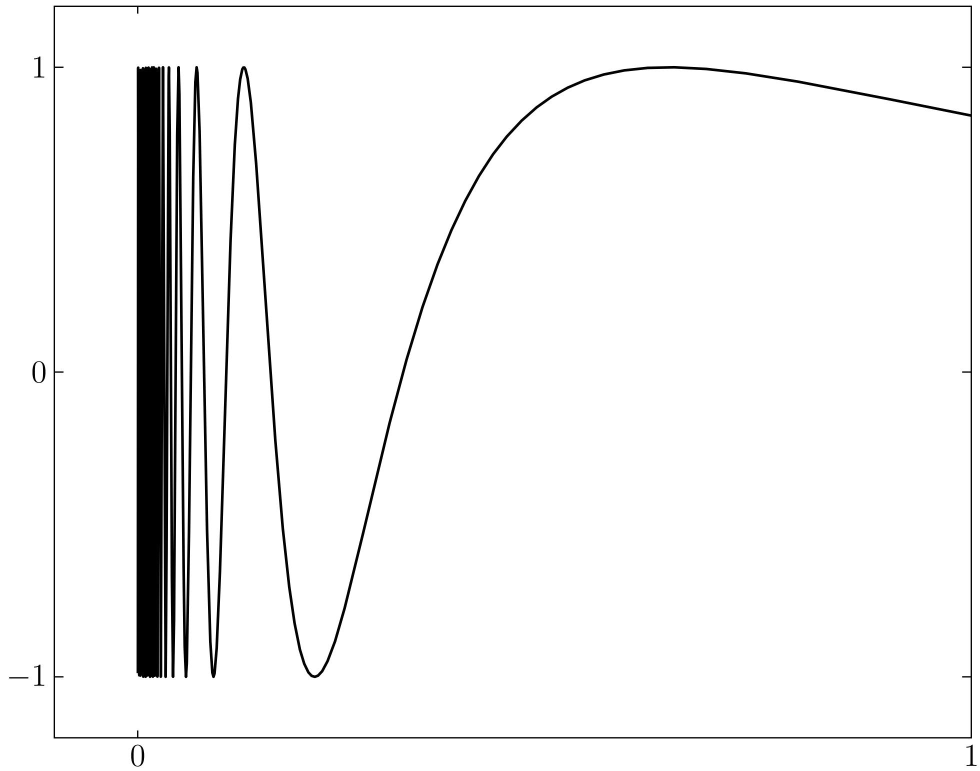
4. Onko R^2:n osajoukko

$$A = \{(x, y) \in \mathsf{R}^2 \,|\, x > 0,\ y = \sin(1/x)\}$$

suljettu, ja jos ei, niin mikä on sen sulkeuma $\bar{A}$? Mitkä pisteet ovat kasautumispisteitä? Kovin yksityiskohtaista todistusta ei tässä haeta.

Ohje. Hahmottele kuva. Huomioi pisteet $(x_k, y_k) \in A$, joissa $x_k = 1/(\pi/2 + k\pi)$ ja $k \in \mathsf{N}$ on parillinen tai pariton. Bolzanon lause.

Ratkaisu:



Osoitetaan aluksi, että A ei ole suljettu. Olkoon $y \in [-1, 1]$ ja $\varepsilon > 0$. Tarkastellaan pistettä $(0, y)$. Nyt Bolzanon lauseen nojalla löytyy sellainen $t \in [0, 2\pi]$, että $y = \sin t$. Mutta myös $y = \sin(t + k2\pi)$ kaikilla $k \in \mathsf{N}$. Ottamalla tarpeeksi suuri $k \in \mathsf{N}$ ja valitsemalla $x = 1/(t + k2\pi) < \varepsilon$, on myös voimassa $\sin(1/x) = y$. Tämä osoittaa sen, että pisteen $(0, y)$ missä tahansa ympäristössä on käyrän pisteitä, joten joukko A ei sisällä kaikkia kasautumispisteitään eikä näin ollen voi olla lauseen 6.22 nojalla suljettu.

Merkitään $J = \{(0, y) \mid 1 \geq |y|\}$. Osoitetaan, että $\bar{A} = A \cup J$. Olkoon $r > 0$. Määritellään apufunktiot

$$f(x, y) = y - \sin(1/x), \quad g(x, y) = \begin{cases} (x - r), & x > r, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Määritellään vielä

$$h(x,y) = \begin{cases} f(x,y)g(x,y), & x > 0 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ h jatkuva koko R:ssä. Nythän joukko

$$U_r := \{(x,y) \mid x > r, y \neq \sin(1/x)\} = h^{-1}(\mathsf{R} \setminus \{0\})$$

on avoimen joukon alkukuvana avoin. Siispä

$$\complement(A \cup J) = \complement J \cap \complement A = \{(x,y) \mid x \leq 0, |y| > 1\} \cup \bigcup_{r>0} U_r$$

on selvästi avoin[1] eli $A \cup J$ suljettu. Toisaalta, jokainen $A \cup J$:n piste on myös A:n kasautumispiste. Näin ollen lauseen 6.21 mukaan

$$\bar{A} = A \cup (A \cup J) = A \cup J.$$

Tehtävän joukkoa kutsutaan joskus nimellä *topologin sinikäyrä* sen useiden mielenkiintoisten topologisten ominaisuuksien johdosta.

5. (6:12) Olkoot $f, g : X \to Y$ jatkuvia kuvauksia ja $A \subset X$ sellainen joukko, että $f|A = g|A$. Osoita, että $f|\bar{A} = g|\bar{A}$.

Ratkaisu:
Nyt pitäisi osoittaa, että $f(a) = g(a)$ kaikilla $a \in \bar{A}$. Olkoon $\varepsilon > 0$ annettu ja $a \in \bar{A}$. Koska f ja g ovat jatkuvia, löytyy $\delta_1, \delta_2 > 0$ siten, että $fB(a,\delta_1) \subset B(f(a), \varepsilon/2)$ ja $gB(a,\delta_2) \subset B(g(a), \varepsilon/2)$. Asetetaan $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Koska $a \in \bar{A}$, löytyy $x \in B(a,\delta) \cap A$. Mutta oletuksen nojalla $f(x) = g(x)$, joten

$$d(f(a), g(a)) \overset{\triangle\text{ey}}{\leq} d(f(a), f(x)) + d(g(x), g(a)) \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Mutta tämän nojalla $d(f(a), g(a)) = 0$, koska $\varepsilon > 0$ oli mielivaltainen.

6. (6:18) Osoita, että jokainen suljettu joukko $F \subset X$ voidaan lausua leikkauksena laskevasta jonosta avoimia joukkoja $U_1 \supset U_2 \supset \cdots$.
Ohje. Käytä sopivia r-ympäristöjä, kts. 4.10.

Ratkaisu:
Ohjeesta viisastuneina määritellään $U_n = B(F, 2^{-n})$. Selvästi jono on laskeva. Lisäksi lauseen 4.11 mukaan joukot ovat avoimia. Osoitetaan siis, että $F = \bigcap_n U_n$.

[1] Tarkista viimeinen muoto! Se ei ole triviaali, mutta helppo.

"$\subset$": Jos $x \in F$, niin $d(x,x) = 0$, joten $d(x,F) = \inf\{d(x,z) \,|\, z \in F\} \leq 0 < 2^{-n}$ kaikilla $n \in \mathsf{N}$.

"$\supset$": Jos $x \in \bigcap_n U_n$, niin $x \in U_n$ kaikilla $n \in \mathsf{N}$. Tämä puolestaan tarkoittaa, että $\inf\{d(x,z) \,|\, z \in F\} < 2^{-n}$ kaikilla $n \in \mathsf{N}$. Mutta tällöin x:n jokaisesta ympäristöstä on löydyttävä F:n pisteitä. Tämä johtuu seuraavasta: Oletetaan ,että löytyy x:n ympäristö, jossa ei ole F:n pisteitä. Tämä tarkoittaa, että löytyy myös kuula $B(x,r)$, jollakin $r > 0$, s.e. $F \cap B(x,r) = \emptyset$. Mutta tämä tarkoittaa sitä, että $d(x,z) > r/2$ kaikilla $z \in F$. Siten $r/2$ on alaraja joukolle $\{d(x,z) \,|\, z \in F\}$, jolloin suurimpana alarajana $\inf\{d(x,z) \,|\, z \in F\} \geq r/2$. Mutta tämä onkin ristiriita, koska piti olla $d(x,F) = \inf\{d(x,z) \,|\, z \in F\} < 2^{-n}$ kaikilla $n \in \mathsf{N}$. Näin ollen x on F:n kasautumispiste. Koska F oli suljettu, sisältää se lauseen 6.22 nojalla kaikki kasautumispisteensä eli $x \in F$.