Topologia I
Harjoitus 5, kevät 2010, Ratkaisut

1. Tarkastellaan euklidisen tason $\mathbb{R}^2$ osajoukkoa

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, e^{xy} > x^2 - y^2\}.$$

Osoita jatkuvien kuvausten avulla, että se on avoin joukko.

Ratk. Voidaan pitää tunnettuna että funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, joka määritellään kaavalla $f(x, y) = e^{xy} + y^2 - x^2$ kun $x, y \in \mathbb{R}$, on jatkuva. Tämä siksi, että f koostuu projektioista, niiden tuloista, yhdistetysta funktiosta $(x, y) \mapsto xy \mapsto e^{xy}$ ja lopuksi summasta. Kirjoitetaan A muodossa

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, e^{xy} + y^2 - x^2 > 0\} = f^{-1}((0, \infty)).$$

Tässä $(0, \infty) \subset \mathbb{R}$ on avoin ja siis A avoimen joukon alkukuvana jatkuvassa kuvauksessa avoin.

2. (4:4) Olkoon $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ varustettuna supnormilla ja sen luomalla metriikalla. Yhtälö

$$\alpha(f)(x) = 5xf(x)$$

määrittelee kuvauksen $\alpha : E \to E$, $f \mapsto \alpha(f)$. Todista, että α on jatkuva.

Ratk. Todistetaan jatkuvuus pisteittäin. Olkoon $f \in E$ ja V $\alpha(f)$:n ympäristö. Valitaan $r > 0$ (V:n avoimuuden perusteella) siten, että $B(\alpha(f), r) \subset V$ ja todistetaan, että $\alpha(B(f, r/5)) \subset B(\alpha(f), r)$. Olkoon $g \in \alpha(B(f, r/5))$ eli $g = \alpha(h)$ jollakin h, jolla $||h - f||_\infty < r/5$. Silloin

$$\begin{aligned}||\alpha(f) - g||_\infty &= \sup_{x\in[0,1]} |5xf(x) - 5xh(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |5x||f(x) - h(x)| \\ &\le 5 \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - h(x)| = 5||f - h||_\infty < r,\end{aligned}$$

siis $g \in B(\alpha(f), r)$. Tämä osoittaa, että $\alpha(B(f, r/5)) \subset B(\alpha(f), r) \subset V$. Jatkuvuuden määritelmän mukaan α on jatkuva pisteessä f, ja koska $f \in E$ oli mielivaltainen, α on jatkuva kaikkialla.

Tehtävä on esimerkki yleisemmästä tilanteesta: jos $L : X \to Y$ on lineaarinen kuvaus normiavaruudelta X normiavaruuteen Y (α on lineaarinen $E \to E$!) niin L on jatkuva kaikkialla jos ja vain jos se on jatkuva yhdessä pisteessä jos ja vain jos löytyy vakio $C > 0$ siten, että $||L(x)||_Y \le C||x||_X$ kaikilla $x \in X$. Tätä ominaisuutta kutsutaan L:n *rajoittuneisuudeksi.* On myös helppo nähdä, että lineaarinen kuvaus on rajoitettu jos ja vain se on Lipschitz (samalla vakiolla). Erityisesti siis tehtävän α on 5-Lipschitz.

3. (4:11) Olkoon $f : [-10, 5] \to \mathbb{R}$ funktio $f(x) = 5x^2 + 6x + 7$. Määritä väliarvolauseen avulla jokin sellainen M, että f on M-Lipschitz.

Ratk. Olkoot $x, y \in [-10, 5], x \ne y$. Väliarvolauseen nojalla $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$ jollakin $\xi \in (\min(x, y), \max(x, y))$. Nyt mille tahansa $t \in [-10, 5]$

$$f'(t) = 10t + 6 \text{ joten } |f'(t)| \le | - 100 + 6| = 94.$$

Näin ollen $|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y| \le 94|x - y|$. Siis f on Lipschitz-jatkuva vakiolla $M = 94$.

4. (5:8, osa) Olkoot $f, g : X \to \mathbb{R}$ jatkuvia funktioita. Osoita, että myös niiden minimifunktio

$$h : X \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \min\{f(x), g(x)\} \quad \text{kun } x \in X,$$

on jatkuva.

Ratk. Huomataan, että h voidaan kirjoittaa kompositiona $h = m \circ H$, missä $H : X \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $H(x) = (f(x), g(x))$ ja $m : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $m(t, s) = \max\{t, s\}$. H tunnetaan jatkuvaksi, sillä se on tulokuvaus (f, g). Jos m saadaan osoitettua jatkuvaksi, saadaan myös h osoitettua jatkuvaksi kahden jatkuvan kuvauksen kompositiona.[1] Tätä varten huomataan, että

$$m(t, s) = \min\{t, s\} = \frac{t+s}{2} - \frac{|t-s|}{2}$$

(joka on selvästi jatkuva). Tämän voi nähdä osissa. Jos $t \geq s$ niin $\min\{t, s\} = s$ ja

$$\frac{t+s}{2} - \frac{|t-s|}{2} = \frac{t+s-(t-s)}{2} = s$$

ja jos $t < s$ niin

$$\begin{aligned} \min\{t, s\} = t &= \frac{t+s-(s-t)}{2} \\ &= \frac{t+s}{2} - \frac{|t-s|}{2}. \end{aligned}$$

Näin ollen saadaan h:lle esitys tunnetusti jatkuvien funktioden kompositiona, joten h on jatkuva.

Koska $\max\{t, s\} = \dfrac{t+s}{2} + \dfrac{|t-s|}{2}$ niin myös $u(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ on jatkuva.

5. (4:8) Olkoon

$$f(\mathbf{0}) = 0 \quad \text{ja} \quad f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, \quad \text{kun } (x, y) \neq \mathbf{0}.$$

Osoita, että näin määritelty funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on epäjatkuva origossa mutta että f:n rajoittuma jokaiselle origon kautta kulkevalle suoralle on jatkuva origossa.

Lyhyeen kysymykseen lyhyt vastaus, onko $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jatkuva muualla?

Ratk. Olkoon $k \in \mathbb{R}$, jolloin joukko $L_k = \{(x, kx) | x \in \mathbb{R}\}$ on origon kautta kulkeva suora. Lasketaan f:n arvot L_k:n pisteissä:

$$f(x, kx) = \frac{x(kx)^2}{x^2 + (kx)^4} = \frac{k^2 x}{1 + k^4 x^2}.$$

Tästä näemme, että

$$\lim_{x \to 0} f(x, kx) = 0$$

[1] Matemaattisessa kirjallisuudessa käytetään tämän kaltaisissa tilanteissa usein ilmaisua "riittää osoittaa m jatkuvaksi", usein ilman täydentävää selitystä.

millä tahansa $k \in \mathbb{R}$. Tämä tarkastelu kattaa kaikki origon kautta kulkevat suorat lukuunottamatta y-akselia, eli joukkoa $L_\infty = \{(0, y) | y \in \mathbb{R}\}$. Tällä suoralla kuitenkin f:n saa arvon nolla ($f(0, y) = 0$ kaikilla $y \in \mathbb{R}$).

Toisin sanoen f:n rajoittumat edella mainituille suorille ovat jatkuvia yhden muuttujan funktioita. Tämä ei kuitenkaan viela riitä takaamaan funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jatkuvuutta. Jos tarkastellaan joukkoa $P = \{(x^2, x) | x \in \mathbb{R}\}$ ja f:n arvoja P:ssa, huomataan

$$f(x^2, x) = \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2},$$

joten voidaan valita $0 < \varepsilon \leq 1/2$ niin, että jokaisella $2 \geq \delta > 0$ löytyy piste $z = (x, y) = ((\delta/2)^2, \delta/2)$, jolla $z \in B(\mathbf{0}, \delta)$, mutta $f(z) \notin B(f(\mathbf{0}), \varepsilon)$, ts. $fB(\mathbf{0}, \delta) \not\subset B(f(\mathbf{0}), \varepsilon)$ kaikilla $\delta > 0$, joten f ei ole jatkuva origossa

Funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kuitenkin on jatkuva origon ulkopuolella, se on jopa mielivaltaisen monta kertaa differentioituva (asia johon tullaan vektorianalyysikurssilla), sillä se on tulo funktioista $(x, y) \mapsto xy^2$ ja $(x, y) \mapsto x^2 + y^4 \mapsto 1/(x^2 + y^4)$, missä yhdistelmän viimeinen vaihe on jatkuva (ja ylipäätään määritelty) origon ulkopuolella.