Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I
Korvaavan kurssikokeen 15.3.2010 ratkaisut

1. Osoita, että puoliavaruus

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + z > 0\}$$

on avoin joukko $\mathbf{R}^3$:ssa.

Ratk. Väite. A on avoin $\mathbf{R}^3$:ssa.

Tod. Määritellään $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $f(x, y, z) = x + y + z$ kun $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Polynomina f on jatkuva kuvaus. Pätee $A = \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) > 0\} = f^{-1}]0, \infty[$. Tunnetusti väli $]0, \infty[$ on avoin $\mathbf{R}$:ssä. Siten A on avoin $\mathbf{R}^3$:ssa avoimen joukon alkukuvana jatkuvassa kuvauksessa $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$.

2. Osoita, että yhtälö

$$d(x, y) = \left|e^{-x} - e^{-y}\right|, \quad \text{kun } x, y \in \mathbf{R},$$

määrittelee metriikan joukossa $\mathbf{R}$.

Ratk. Väite. d on metriikka $\mathbf{R}$:ssä.

Tod. Ensinnäkin $d(x, y) = \left|e^{-x} - e^{-y}\right| \geq 0$ kaikilla $x, y \in \mathbf{R}$. Olkoon $x, y, z \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}
(M1)\quad & d(x, y) = \left|e^{-x} - e^{-y}\right| = \left|e^{-x} - e^{-z} + e^{-z} - e^{-y}\right| \leq \left|e^{-x} - e^{-z}\right| \\
& \quad + \left|e^{-z} - e^{-y}\right| = d(x, z) + d(z, y). \\
(M2)\quad & d(x, y) = \left|e^{-x} - e^{-y}\right| + \left|e^{-y} - e^{-x}\right| = d(y, x). \\
(M3)\quad & d(x, y) = \left|e^{-x} - e^{-y}\right| = 0 \Leftrightarrow e^{-x} - e^{-y} = 0 \Leftrightarrow e^{x} = e^{y} \Leftrightarrow x = y.
\end{aligned}$$

3. Tarkastellaan funktioavaruutta $E = C\big([0, 1], \mathbf{R}\big) = \{$jatkuvat funktiot $f : [0, 1] \to \mathbf{R}\}$ ja sen osajoukkoa

$$A = \{f_n : [0, 1] \to \mathbf{R} \mid f_n(x) = \sqrt[n]{x},\ n \in \mathbf{N}\}.$$

Merkitään vakiofunktiota jossa $x \mapsto 1$ kaikilla x, lyhyesti $\mathbf{1}$:llä, jolloin $\mathbf{1} \in E$.

(a) Määrää etäisyys $d(\mathbf{1}, A)$, kun E:ssä on supnormin $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [0, 1]\}$ luoma metriikkaa d. Päteekö $\mathbf{1} \in \bar{A}$ ($\bar{A}$ on A:n sulkeuma), kun käytetään tätä metriikkaa? Perustelu.

(b) Etäisyys $e(\mathbf{1}, A)$, kun E:ssä käytetään L_2-normin $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 f(x)^2\, dx\right)^{1/2}$ luomaa metriikkaa e.

Ratk. (a) Selvästi $0 \leq f_n(x) \leq 1$ kaikilla $x \in [0,1]$ ja $n \in \mathbf{N}$. Olkoon $f_n \in A$. Silloin $|\mathbf{1}(x) - f_n(x)| = 1 - f_n(x) \leq 1 - 0 = 1$ kaikilla $x \in [0,1]$, ja toisaalta $|\mathbf{1}(0) - f_n(0)| = 1$. Siten kaikilla $f_n \in A$ pätee

$$d(\mathbf{1}, f_n) = \sup\{|\mathbf{1}(x) - f_n(x)| \,:\, x \in [0,1]\} = 1.$$

Siten

$$d(\mathbf{1}, A) = \inf\{d(\mathbf{1}, f_n) \,|\, f_n \in A\} = 1.$$

Koska $\bar{A} = \{f \in E \,|\, d(f, A) = 0\}$ ja $d(\mathbf{1}; A) = 1 \neq 0$, niin $\mathbf{1} \notin \bar{A}$.
(b) Olkoon $f_n \in A$. Silloin

$$\begin{aligned}
e(\mathbf{1}, f_n)^2 = \|\mathbf{1} - f_n\|_2^2 &= \int_0^1 (\mathbf{1}(x) - f_n(x))^2 \, dx = \int_0^1 (1 - \sqrt[n]{x})^2 \, dx \\
&= \int_0^1 \big(1 - 2x^{1/n} + x^{2/n}\big) \, dx = \Big/_0^1 \Big(x - \frac{2n}{n+1} \, x^{\frac{n+1}{n}} + \frac{n}{n+2} \, x^{\frac{n+2}{n}}\Big) \\
&= 1 - \frac{2n}{n+1} + \frac{n}{n+2} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} < \epsilon^2,
\end{aligned}$$

kun $n \geq n_\epsilon$ eräällä $n_\epsilon \in \mathbf{N}$. Siis

$$e(\mathbf{1}, A) = \inf\{e(\mathbf{1}, f_n) \,|\, f_n \in A\} < \epsilon \quad \text{kaikilla } \epsilon > 0.$$

Siten $e(\mathbf{1}, A) = 0$.
Huom. $\mathbf{1} \in \bar{A}$, kun metriikkana on e.

4. Olkoon F niiden $\mathbf{R}^2$:n pisteiden (x, y) joukko, joilla pätee

$$\sin(n(x + y)) \leq xy \quad \text{kaikilla } n \in \mathbf{N}.$$

Osoita, että F on suljettu joukko $\mathbf{R}^2$:ssa. Pidetään tunnettuna, että funktio $\sin : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ on jatkuva.

Ratk. Kiinnitetään n ja merkitään $F_n = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, \sin(n(x + y)) \leq xy\}$. Silloin $F = \cap\{F_n \,|\, n \in \mathbf{N}\}$. Määritellään kuvaukset $f_n : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f_n(x, y) = \sin(n(x + y)) - xy$, $n \in \mathbf{N}$. Koska $(x, y) \mapsto n(x + y)$ on polynomina jatkuva ja tunnetusti $\sin : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ on jatkuva, yhdistettynä kuvauksena $(x, y) \mapsto \sin(n(x + y))$ on jatkuva. Vastaavasti polynomikuvaus $(x, y) \mapsto xy$ on jatkuva, ja jatkuvien erotuksena lopulta kukin f_n on jatkuva.
Pätee

$$F_n = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, f_n(x, y) \leq 0\} = f_n^{-1}] - \infty, 0], \quad n \in \mathbf{N}.$$

Siten F_n on $\mathbf{R}^2$:ssa suljettu suljetun välin $] - \infty, 0]$ alkukuvana jatkuvassa kuvauksessa $f_n : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Siten $F = \cap F_n$ on suljettujen leikkauksena suljettu.