Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I
Korvaava kurssikoe 10.5.2010, ratkaisut

1. Määritä seuraavien $\mathbf{R}^n$:n ($n = 1$ tai 2) jonojen (x_k) raja-arvot, ja jos jonolla sellaista ei ole, niin jonon kasautumisarvot:

$$(a) \quad x_k = \frac{k}{k+1}, \quad (b) \quad x_k = \Big(\min\{(-1)^k k, 0\}, \frac{k}{k+1} \Big),$$
$$(c) \quad x_k = \big(\cos(\pi/2 + k\pi), \sin(\pi/2 + k\pi) \big).$$

Pelkkä oikea vastaus riittää. Kannattaa kirjoittaa auki jonon ensimmäisiä jäseniä.

Ratk. (a) $x_k = k/(k+1) = 1/(1 + 1/k) \to 1$.
(b) Ei suppene, koska 1. koordinaattien jono ei suppene. Alkupää on $(-1, 1/2)$, $(0, 2/3)$, $(-3, 3/4)$, $(0, 4/5)$, $(-5, 5/6)$, $\cdots$. Kasautumisarvo on $(0, 1)$.
(c) Ei suppene, koska 2. koordinaattien jono ei suppene. Alkupää on $(0, -1)$, $((0, 1)$, $(0, -1)$, $(0, 1)$, $\cdots$. Kasautumisarvot ovat $(0, -1)$ ja $(0, 1)$.

2. (a) Märittele metrisen avaruuden täydellisyys.

(b) Olkoot (X, d) ja (Y, e) keskenään homeomorfisia metrisiä avaruuksia: $(X, d) \approx (Y, e)$. Jos toinen avaruuksista on täydellinen, onko myös toinen sitä, ts. onko täydellisyys topologinen ominaisuus?

Ohje. (b) Tarkastele $\mathbf{R}$:n välejä, vaikkapa $]0, 1]$ ja $[1, \infty[$.

Ratk. (a) Metrinen avaruus (X, d) on täydellinen, jos sen jokainen Cauchy-jono suppenee kohti avaruuden X pistettä.

(b) Väite. Täydellisyys ei ole topologinen ominaisuus.

Tod. Riittää esittää vastaesimerkki. Tarkastellaan vaikka $\mathbf{R}$:n välejä $X =]0, 1]$ ja $Y = [1, \infty[$ euklidisella metriikalla varustettuina. Niistä X ei ole täydellinen, sillä se ei ole suljettu avaruudessa $\mathbf{R}$; Y puolestaan on täydellinen, sillä se on $\mathbf{R}$:n suljettu osajoukko. Avaruudet ovat kuitenkin homeomorfiset, $X \approx Y$, homeomorfismina esimerkiksi kuvaus $f : X \to Y$, $f(x) = 1/x$ kun $x \in X$. Käänteishomeomorfismihan on $f^{-1} : Y \to X$, $f^{-1}(y) = 1/y$ kun $y \in Y$.

3. Olkoon (X, d) metrinen avaruus, $A \subset X$ ja $U = X \setminus \bar{A}$. Osoita, että $\partial U \subset \partial A$.

Ohje. Sulkeuman monotonisuus: jos $B \subset C$, niin $\bar{B} \subset \bar{C}$.

Ratk. Väite. $\partial U \subset \partial A$.

Tod. Koska $A \subset \bar{A}$, niin $U = X \setminus \bar{A} \subset X \setminus A$ ja $X \setminus U = \bar{A}$. Siten sulkeuman monotonisuuden perusteella

$$\partial U = \bar{U} \cap cl(X \setminus U) \subset cl(X \setminus A) \cap cl(\bar{A}) = cl(X \setminus A) \cap \bar{A} = \partial A.$$

4. (a) Määrittele kompakti metrinen avaruus.

Tutki, onko euklidisen avaruuden $\mathbf{R}^4$ osajoukko

$$A = \{(x, y, z, u) \in \mathbf{R}^4 \mid x^2 + y^2 = z^2 + u^2\}$$

(b) kompakti, (c) polkuyhtenäinen ja siten yhtenäinen.

Ratk. (a) Avaruus on kompakti (tarkemmin jonokompakti), jos sen jokaisella jonolla on ainakin yksi kyseisen avaruuden pistettä kohti suppeneva osajono. Yhtäpitävästi: Jokaisella jonolla on ainakin yksi kasautumisarvo kyseisessä avaruudessa.

(b) Joukko A on kyllä sujettu $\mathbf{R}^4$:ssä, mutta se ei ole rajoitettu, sillä $(t, 0, t, 0) \in A$ kaikilla $t \in \mathbf{R}$ ja $|(t, 0, t, 0)| \to \infty$, kun $t \to \infty$. Siten A ei ole kompakti.

(c) Väite. A on murtoviivayhtenäinen ja siten sekä polkuyhtenäinen että yhtenäinen.

Tod. Olkoon $w_k = (x_k, y_k, z_k, u_k) \in A$, $k = 1, 2$. $\mathbf{R}^4$ on normiavaruus. Janan $[\mathbf{0}, w_k] \subset \mathbf{R}^4$ pisteet ovat muotoa

$$(1 - t)\,\mathbf{0} + t\,w_k = tw_k = (tx_k, ty_k, tz_k, tu_k), \quad t \in [0, 1].$$

Siten $tw_k \in A$ kaikilla $t \in [0, 1]$, sillä

$$(tx_k)^2 + (ty_k)^2 - (tz_k)^2 - (tu_k)^2 = t^2(x_k^2 + y_k^2 - z_k^2 - u_k^2) = 0.$$

Siis $[\mathbf{0}, w_k] \subset A$, $k = 1, 2$, joten $mur(w_1, \mathbf{0}, w_2) \subset A$ kaikilla $w_1, w_2 \in A$, ja kyseinen murtoviiva siis yhdistää pisteet w_1 ja w_2 joukossa A.