Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I
Korvaava kurssikoe 15.3.2010

Huom. Tenttijällä saa olla A4-arkin kokoinen tiivistelmä mukanaan tentissä.

1. Osoita, että puoliavaruus

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + z > 0\}$$

on avoin joukko $\mathbf{R}^3$:ssa.

2. Osoita, että yhtälö

$$d(x, y) = \left|e^{-x} - e^{-y}\right|, \quad \text{kun } x, y \in \mathbf{R},$$

määrittelee metriikan joukossa $\mathbf{R}$.

3. Tarkastellaan funktioavaruutta $E = C\big([0,1], \mathbf{R}\big) = \{$jatkuvat funktiot $f : [0,1] \to \mathbf{R}\}$ ja sen osajoukkoa

$$A = \{f_n : [0,1] \to \mathbf{R} \mid f_n(x) = \sqrt[n]{x},\ n \in \mathbf{N}\}.$$

Merkitään vakiofunktiota jossa $x \mapsto 1$ kaikilla x, lyhyesti $\mathbf{1}$:llä, jolloin $\mathbf{1} \in E$.

(a) Määrää etäisyys $d(\mathbf{1}, A)$, kun E:ssä on supnormin $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$ luoma metriikkaa d. Päteekö $\mathbf{1} \in \bar{A}$ ($\bar{A}$ on A:n sulkeuma), kun käytetään tätä metriikkaa? Perustelu.

(b) Etäisyys $e(\mathbf{1}, A)$, kun E:ssä käytetään L_2-normin $\|f\|_2 = \Big(\int_0^1 f(x)^2\,dx\Big)^{1/2}$ luomaa metriikkaa e.

4. Olkoon F niiden $\mathbf{R}^2$:n pisteiden (x, y) joukko, joilla pätee

$$\sin(n(x + y)) \leq xy \quad \text{kaikilla } n \in \mathbf{N}.$$

Osoita, että F on suljettu joukko $\mathbf{R}^2$:ssa. Pidetään tunnettuna, että funktio $\sin : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ on jatkuva.