Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I
Korvaava kurssikoe 10.5.2010

Huom. Tenttijällä saa olla A4-arkin kokoinen tiivistelmä mukanaan tentissä.

1. Määritä seuraavien $\mathbf{R}^n$:n ($n = 1$ tai 2) jonojen (x_k) raja-arvot, ja jos jonolla sellaista ei ole, niin jonon kasautumisarvot:

$$(a) \quad x_k = \frac{k}{k+1}, \quad (b) \quad x_k = \Big(\min\{(-1)^k k, 0\},\, \frac{k}{k+1} \Big),$$
$$(c) \quad x_k = \big(\cos(\pi/2 + k\pi),\, \sin(\pi/2 + k\pi) \big).$$

Pelkkä oikea vastaus riittää. Kannattaa kirjoittaa auki jonon ensimmäisiä jäseniä.

2. (a) Määrittele metrisen avaruuden täydellisyys.

(b) Olkoot (X,d) ja (Y,e) keskenään homeomorfisia metrisiä avaruuksia: $(X,d) \approx (Y,e)$. Jos toinen avaruuksista on täydellinen, onko myös toinen sitä, ts. onko täydellisyys topologinen ominaisuus?

Ohje. (b) Tarkastele $\mathbf{R}$:n välejä, vaikkapa $]0,1]$ ja $[1,\infty[$.

3. Olkoon (X,d) metrinen avaruus, $A \subset X$ ja $U = X \setminus \bar{A}$. Osoita, että $\partial U \subset \partial A$.

Ohje. Sulkeuman monotonisuus: jos $B \subset C$, niin $\bar{B} \subset \bar{C}$.

4. (a) Määrittele kompakti metrinen avaruus.

Tutki, onko euklidisen avaruuden $\mathbf{R}^4$ osajoukko

$$A = \{(x,y,z,u) \in \mathbf{R}^4 \mid x^2 + y^2 = z^2 + u^2\}$$

(b) kompakti, (c) polkuyhtenäinen ja siten yhtenäinen.