Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I
Kurssikoe 4.5.2010, ratkaisut

1. Määritä euklidisen tason $\mathbf{R}^2$ osajoukon

$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 0 < y \leq 1 - x^2\}$$

sisäpisteiden joukko $int(A)$ ja reuna ∂A. Oikea vastaus riittää! Kannattaa piirtää kuva.

Ratk. Tulos on

$int(A) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 0 < y < 1 - x^2\}$ ja

$\partial A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, -1 \leq x \leq 1, y = 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, -1 \leq x \leq 1, y = 1 - x^2\}$.

2. (a) Olkoon kuvaus $f : X \to Y$ jatkuva, ja olkoon (x_n) jono X:ssä. Osoita, että jos jono (x_n) suppenee, niin sen kuvien jono (y_n), jossa $y_n = f(x_n)$, suppenee Y:ssä.

(b) Olkoon $f : X \to Y$ peräti homeomorfismi. Osoita, että jos kuvien jono (y_n), jossa $y_n = f(x_n)$, suppenee, niin jono (x_n) suppenee X:ssä.

Ratk. (a) Väite. Jos jono(x_n) suppenee, niin suppenee myös jono (y_n), jossa $y_n = f(x_n)$.

Tod. Oletetaan että $x_n \to a \in X$. Koska kuvaus $f : X \to Y$ on jatkuva ja siten jonojatkuva, erityisesti pisteessä a, niin $y_n = f(x_n) \to f(a)$. Jono (y_n) siis suppenee kohti pistettä $f(a) \in Y$.

(b) Väite. Jos jono (y_n), jossa $y_n = f(x_n)$, suppenee, suppenee myös jono (x_n).

Tod. Koska kuvaus $f : X \to Y$ on homeomorfismi, käänteiskuvaus $f^{-1} : Y \to X$ on jatkuva, ja sille pätee $x_n = f^{-1}(f(x_n)) = f^{-1}(y_n)$. Sovelletaan (a)-kohtaa.

3. (a) Määrittele metrisen avaruuden (X,d) yhtenäisyys. Lisäksi, olkoon $A \subset X$. Kuinka joukon A yhtenäisyys käsitteenä palautuu edellä määrittelemääsi avaruuden yhtenäisyyteen?

(b) Osoita seuraava: Olkoon (X,d) metrinen avaruus. Jos on olemassa sellainen $A \subset X$, että $\emptyset \neq A \neq X$ ja $\partial A = \emptyset$, ts. A:n reuna on tyhjä, niin avaruus X on epäyhtenäinen.

Ratk. (a) Avaruus (X,d) on yhtenäinen, jos ei ole sen osajoukkoja $A, B \subset X$, joille pätee

(1) $X = A \cup B$ (2) $A \cap B = \emptyset$

(3) $A \neq \emptyset \neq B$ (4) A ja B ovat avoimia avaruudessa X.

Osajoukko $A \subset X$ on yhtenäinen, jos avaruus (A, d_A) varustettuna indusoidulla metriikalla (yleisessä topologisessa avaruudessa relatiivitopologialla) on yhtenäinen.

(b) Väite. Jos löytyy $A \subset X$, jolla $\emptyset \neq A \neq X$ ja $\partial A = \emptyset$, niin avaruus X on epäyhtenäinen.

Tod. Merkitään $B = X \setminus A$. Silloin $B \neq \emptyset$. Tunnetusti $\partial A = \bar{A} \cap cl(X \setminus A) = \bar{A} \cap \bar{B}$. Oletuksen mukaan $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$. Lisäksi, koska $A \subset \bar{A}$ ja $B \subset \bar{B}$, niin $\bar{A} \neq \emptyset \neq \bar{B}$ ja $X = A \cup B \subset \bar{A} \cup \bar{B}$. Koska $\bar{A}$ on suljettu, $\bar{B} = X \setminus \bar{A}$ on avoin. Vastaavasti $\bar{A}$ on avoin. Joukot $\bar{A}$ ja $\bar{B}$ siis toteuttavat määritelmän ehdot (1)-(4). Siten X on epäyhtenäinen.

Huom. Kohdassa (4) voidaan yhtä hyvin edellyttää, että joukot A ja B ovat suljettuja. Siten kohdassa (b) riittää, että $\bar{A}$ ja $\bar{B}$ ovat suljettuja.

4. Todista kurssin lause: Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Olkoot A ja B sen erillisiä ja epätyhjiä osajoukkoja, A kompakti ja B suljettu. Tällöin $d(A, B) > 0$. Saa käyttää läheisesti asiaan liittyviä lauseita.

Ohje. Jos mokomaa tarvitsee, voi pitää tunnettuna että

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) \mid x \in A, y \in B\} = \inf\{d(x, B) \mid x \in A\}.$$

Ratk. Väite. $d(A, B) > 0$.

Tod. Koska A on kompakti, tunnetun lauseen mukaan löytyy sellainen $a \in A$, että $d(a, B) = d(A, B)$.
Koska B on suljettu, on $X \setminus B$ avoin, ja koska $a \in A \subset X \setminus B$, löytyy sellainen $r > 0$ että $B(a, r) \cap B = \emptyset$. Siten $d(a, y) \geq r$ kaikilla $y \in B$, joten

$$d(A, B) = d(a, B) = \inf\{d(a, y) \mid y \in B\} \geq r > 0.$$

Alku toisin: Jos ei muista alussa käytettyä lausetta, voi soveltaa esimerkiksi jatkuvaa funktiota $f : X \to \mathbf{R}$, $f(x) = d(x, B)$, joka tunnetusti saavuttaa miniminsä kompaktissa joukossa A, sanokaamme pisteessä $a \in A$. Tällöin

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \inf\{d(x, B) \mid x \in A\} = \inf\{f(x) \mid x \in A\} = \min\{f(x) \mid x \in A\} \\ &= f(a) = d(a, B). \end{aligned}$$

Jatko kuten edellä.