Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I
Kurssikoe 2.3.2010, ratkaisut.

1. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja A sen epätyhjä osajoukko. Osoita, että joukko

$$U = \{x \in X \mid d(x, A) > 0\}$$

on avoin X:ssä.

Ratk. Väite. U on avoin X:ssä.

Tod. Tunnetusti etäisyysfunktio $f : X \to \mathbf{R}$, $f(x) = d(x, A)$, on jatkuva. Pätee $U = \{x \in X \mid f(x) > 0\} = f^{-1}]0, \infty[$. Tunnetusti joukko U on avoin - $\mathbf{R}$:n avoimen välin $]0, \infty[$ alkukuvana jatkuvassa kuvauksessa f.

Toinen tod. Olkoon $x \in U$. Silloin $d = d(x, A) > 0$. Voidaan valita $r = d/2$, jolloin kolmioepäyhtälötarkastelu antaa $B(x, r) \subset U$. Määritelmän mukaan U on avoin.

2. Määritellään $\mathbf{R}$:ssä pisteiden x ja y välimatka yhtälöllä

$$d(x, y) = \big||x| - |y|\big|, \quad \text{kun } x, y \in \mathbf{R}.$$

Mitkä metriikkapostulaateista (M1)-(M3) kuvaus d toteuttaa joukossa $\mathbf{R}$? Onko se metriikka siinä? Perustelu.

Ratk. Postulaatti (M1) toteutuu, sillä

$$d(x, y) = \big||x| - |y|\big| = \big||x| - |z| + |z| - |y|\big| \leq \big||x| - |z|\big| + \big||z| - |y|\big| = d(x, z) + d(z, y).$$

(M2) toteutuu, sillä

$$d(x, y) = \big||x| - |y|\big| = \big||y| - |x|\big| = d(y, x).$$

(M3) ei toteudu $\mathbf{R}$:ssä. Vastaesimerkki: Valitaan $x = 1$ ja $y = -1$, jolloin $x, y \in \mathbf{R}$ ja $d(x, y) = \big||1| - |-1|\big| = |1 - 1| = 0$, mutta kuitenkin $x \neq y$.

Johtopäätös on, että d ei ole metriikka $\mathbf{R}$:ssä.

3. Olkoon $(E, \| * \|)$ normiavaruus, ja kiinnitetään kaksi sen pistettä $a, b \in E$. Tarkastellaan kuvausta $f : [0, 1] \to E$,

$$f(t) = (1 - t)\, a + t\, b, \quad \text{kun } t \in [0, 1],$$

jossa väli $[0, 1]$ on varustettu tavallisella euklidisella metriikalla d.

(a) Osoita että f on jatkuva.

(b) Osoita että se on peräti Lipschitz.

Ratk. Tunnetusti Lipschitz-kuvaus on aina jatkuva. Siten riittää tehdä kohta (b), kohta (a) seuraa siitä.

(b) Väite. Kuvaus f on Lipcshitz.

Tod. Olkoon $s, t \in [0,1]$. Tällöin normin ominaisuuksien perusteella

$$\begin{aligned} \|f(s) - f(t)\| &= \|(1-s)\,a + s\,b - (1-t)\,a - t\,b\| = \|(t-s)\,a + (s-t)\,b\| \\ &\le \|(t-s)\,a\| + \|(s-t)\,b\| = |t-s|\,\|a\| + |s-t|\,\|b\| = \big(\|a\| + \|b\|\big)|s-t|. \end{aligned}$$

Siten Lipschitz-vakioksi kelpaa $M = \|a\| + \|b\|$.

Huom. Kohta (a) menisi suoraan seuraavasti: Kuvaukset $[0,1] \to \mathbf{R}$, $t \mapsto 1-t$ ja $t \mapsto t$ ovat tunnetusti jatkuvia. Samoin vakiokuvaukset $[0,1] \to E$, $t \mapsto a$ ja $t \mapsto b$. Jatkuvien tuloina kuvaukset $[0,1] \to E$, $t \mapsto (1-t)\,a$ ja $t \mapsto t\,b$ ovat jatkuvia. Siten $f : [0,1] \to E$ on näiden summana jatkuva.

4. Tarkastellaan euklidisen tason $\mathbf{R}^2$:n osajoukkoja

$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x > 0,\ xy = 1\} \quad \text{ja} \quad B = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x > 0,\ y = 0\}.$$

(a) Osoita, että joukko A on suljettu.

(b) Osoita, tavalla tai toisella, että A:lla ja B:llä on jotkin erilliset ympäristöt, ts. $\mathbf{R}^2$:n avoimet joukot U ja V, joilla $A \subset U$, $B \subset V$ ja $U \cap V = \emptyset$.

Ohje (b). Sopiva lause tai voit konstruoida A:n ja B:n väliin erottavan käyrän.

Ratk. (a) Väite. A on suljettu $\mathbf{R}^2$:ssa.

Tod. Merkitään $F = \{(x,y) \,|\, xy = 1\}$ ja $H = \{(x,y) \,|\, x \ge 0\}$. Sevästi F ja H ovat suljettuja (perustelussa voidaan käyttää vaikka jatkuvia funktioita $f, g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = xy - 1$ ja $g(x,y) = x = pr_1(x,y)$). Siten $A = F \cap H$ on suljettujen joukkojen leikkauksena suljettu.

(b) Väite. Joukoilla A ja B on erilliset ympäristöt $\mathbf{R}^2$:ssa.

Tod. Selvästi B:n sulkeuma on $\bar{B} = \{(x,y) \,|\, x \ge 0,\ y = 0\}$. Lisäksi pätee $A \cap \bar{B} = \emptyset$. Koska A ja $\bar{B}$ ovat erillisiä suljettuja joukkoja, Urysohnin lemman mukaan niillä on erilliset ympäristöt U ja V. Nämä kelpaavat A:n ja B:n erillisiksi ympäristöiksi.

Huom. Ohjeessa mainittu konstruktio: Joukot A ja B ovat tasokäyrät $y = 1/x$ ja $y = 0$, $x > 0$. Niiden väliin asettuu käyrä $y = 1/(2x)$, $x > 0$. Se rajaa joukot $U = \{(x,y) \,|\, x > 0,\ xy > 1/2\}$ ja $V = \{(x,y) \,|\, x > 0,\ xy < 1/2\}$. Selvästi nämä ovat avoimia $\mathbf{R}^2$:ssa, $A \subset U$, $B \subset V$ ja $U \cap V = \emptyset$.